極限外乱法による建築物の地震時応答評価の信頼性向上と制振ダンパーの最適配置問題(Dissertation_全文)

藤田, 皓平

極限外乱法による建築物の地震時応答評価の信頼性向上と制振ダンパーの最適配置問題

藤田 皓平

目次

第 1 章　序 **1**

1.1　研究の背景 1

1.1.1 地震動の不確定性を考慮した極限外乱問題 1

1.1.2 地震動の不確定性を考慮したパッシブダンパーの最適配置問題 7

1.1.3 構造物特性の不確定性を考慮したロバスト性評価法 8

1.2　研究の目的 10

1.3　本論文の構成と趣旨 12

第 2 章　水平 2 方向地震動の相関に関する極限外乱法 **17**

2.1　地震動の多次元性に関する不確定性と極限外乱問題 17

2.2　記録地震波における水平 2 方向成分の相関性に関する分析 19

2.3　非定常入力地震動モデル 34

2.4　水平 2 方向同時入力地震動に対する極限外乱問題 35

2.4.1 水平 2 方向同時入力地震動を受ける立体骨組のモデル化 35

2.4.2 水平 2 方向同時入力を受ける柱頭縁応力の評価 36

2.4.3 地動主軸の存在を仮定した Penzien-Watabe モデルに基づく入力地震動モデル 41

2.4.4 拡張 Penzien-Watabe モデル 43

2.5　最悪な相関関係を見出す極限外乱問題に対する解法 45

2.6　最悪な相関関係を有する多成分模擬入力地震動の作成法 49

2.7　数値解析例 50

2.7.1 建物モデルのパラメター 50

2.7.2 地震動のパラメター 51

2.7.3 建物モデルの変動が極限応答に及ぼす影響 53

2.7.4 地動主軸 2 方向入力問題において建物軸と地動主軸の角度の変動が極限応答に及ぼす影響 57

2.7.5 極限外乱に対する応答と任意の入力に対する応答の比較 58

2.8　結論 61

第 3 章　水平上下地震動の振動数特性の最悪な組み合せを考慮した極限外乱の特性　65

3.1　多成分入力地震動の相関性に関する極限外乱理論の拡張と適用性 ・・・・・ 65

3.2　水平上下同時入力地震動に対する極限外乱問題 ・・・・・・・・・・・・・・・ 65

3.2.1 水平上下同時入力地震動を受ける平面骨組の梁端部曲げモーメント応答の評価・・ 65

3.2.2 水平上下同時入力地震動の相関関係に関する極限外乱問題 ・・・・・・・・・・ 68

3.2.3 水平上下同時入力地震動の相関関係に関する極限外乱問題の解法 ・・・・・・・ 69

3.2.4 規定された Auto PSD 関数に対する極限外乱問題の数値例 ・・・・・・・・・・ 70

3.3　パワースペクトル密度関数の変動を考慮した地震動モデル ・・・・・・・・・ 73

3.4　最悪なパワースペクトル密度関数の組み合せ問題 ・・・・・・・・・・・・・・ 74

3.5　水平上下同時入力地震動のパラメター変動が極限応答に及ぼす影響 ・・・・ 78

3.6　最悪位相差を考慮した極限外乱法の時間領域への適用 ・・・・・・・・・・・ 83

3.6.1 正弦波による入力外乱に対する最悪位相差入力・・・・・・・・・・・・・・・・ 86

3.6.2 現実的な地震動外乱に対する最悪位相差入力・・・・・・・・・・・・・・・・・ 92

3.7　結論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 99

第 4 章　入力地震動の不確定性と支持部材剛性の影響を考慮した粘弾性ダンパーの最適配置法　103

4.1　極限外乱理論を用いたパッシブダンパーの最適配置法の意義 ・・・・・・・ 103

4.2　入力地震動の不確定性と支持部材剛性の影響を考慮した粘弾性ダンパーの最適配置問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 104

4.2.1　振動数依存性を有する粘弾性ダンパーのモデル化 ・・・・・・・・・・・・・・ 104

4.2.1.1　等価 Kelvin-Voigt モデルへの置換 -*N* 自由度モデル- ・・・・・・・・・・ 105

4.2.1.2 微小質点を仮定した詳細モデルへの置換 -3*N* 自由度モデル ・・・・・・・ 106

4.2.2　変動極限外乱の定義 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 106

4.2.3　振動数領域における応答評価の定式化 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 108

4.2.3.1 3*N* 自由度モデル ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 108

4.2.3.2 *N* 自由度モデル ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 110

4.2.4　ダンパー配置と支持部材剛性の同時最適設計問題 ・・・・・・・・・・・・・・ 110

4.3　ダンパー配置と支持部材剛性に対する最適性条件 ・・・・・・・・・・・・・ 112

4.4　最適設計問題に対する解法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 113

4.4.1　最適設計問題に対する勾配型最適化アルゴリズム・・・・・・・・・・・・・・・ 113

4.4.2　評価関数の設計変数に対する感度表現 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 118

4.5　5 層及び 10 層せん断型建物モデルに対する最適設計例 ・・・・・・・・・・ 121

4.5.1 構造物と粘弾性ダンパーのモデルパラメターの設定 ・・・・・・・・・・・・・ 121

4.5.2 制約条件と性能クライテリアの設定 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 123
4.5.3 最大応答値を評価する上でのピークファクターの設定 ・・・・・・・・・・・・・ 123
4.5.4 最適設計例 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 129

4.7 結論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 134

第 5 章 層間変位伝達関数の最大振幅の最小化を目標とする
最適ダンパー配置法 **137**

5.1 伝達関数を用いた最適設計法の意義 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 137

5.2 層間変位伝達関数を用いた最適配置問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 137

5.3 最適設計問題の解法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 139

5.4 5 層及び 10 層せん断型建物モデルに対する最適設計例 ・・・・・・・・・・・ 141

5.5 結論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 148

第 6 章 免震建物特性の不確定性を考慮した地震時応答に関する
ロバスト性評価法 **153**

6.1 構造物特性の不確定性を考慮した不確定性解析法の必要性 ・・・・・・・・ 153

6.2 免震建物のモデル化における不確定性の取り扱い ・・・・・・・・・・・・・・ 154

6.3 構造物特性の不確定性を考慮した既往の区間解析法 ・・・・・・・・・・・・・ 155

6.4 Taylor 展開に基づく上下限探索による区間解析法 ・・・・・・・・・・・・・・ 157
6.4.1 Taylor 展開による 1 次近似を用いた区間解析法 ・・・・・・・・・・・・・ 157
6.4.2 Taylor 展開による 2 次近似を用いた区間解析法 ・・・・・・・・・・・・・ 158
6.4.3 評価関数の非単調性を考慮した新しい区間解析法
：URP（Updated Reference Point）法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 159

6.5 弾性応答に対する URP 法の精度検証 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 161
6.5.1 天然ゴム系積層ゴムアイソレータ(NRB)を有する免震建物モデルの特性 ・・・・ 162
6.5.2 ばらつきを考慮する不確定パラメター ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 163
6.5.3 入力地震動 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 163
6.5.4 免震層水平変位応答に関する不確定性解析 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 163
6.5.5 頂部絶対加速度応答に関する不確定性解析 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 167

6.6 弾塑性応答に対する URP 法の精度検証 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 169
6.6.1 鉛プラグ入り積層ゴムアイソレータ(LRB)を有する免震建物モデルの特性・・・・ 170
6.6.2 ばらつきを考慮する不確定パラメター ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 171
6.6.3 2 次多項式近似を用いた不確定性解析法・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 171
6.6.4 免震層水平変位応答に関する不確定性解析 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 174

6.7 異なる免震アイソレータを複合的に用いる免震建物に対する不確定性解析 ・ 179
6.7.1 NRB および LRB による基礎免震を有する免震建物モデルの特性 ・・・・・・・・ 180
6.7.2 ばらつきを考慮する不確定パラメター ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 181
6.7.3 ノミナルモデルにおける免震性能の比較 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 182
6.7.4 免震層水平変位応答に関する不確定性解析 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 183
6.7.5 頂部絶対加速度応答に関する不確定性解析 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 183
6.8 結論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 184

第 7 章 結論 189

第 1 章　序

1.1　研究の背景

超高層建物，大スパン構造物，収容人数の大きな大規模構造物，原子炉建屋など，都市機能を担う重要建築構造物は，設計時点で想定される幅広い種類の大地震に対して構造的に安全であり，継続使用が可能であることが望まれる(日本建築学会(2005))。地震多発国である日本において建築構造物の設計を行う際には，骨組構造や耐震壁などを用いた通常の耐震設計法を目指すだけではなく，建物の層間変形を粘性体・粘弾性体・鋼材ダンパー等の変形に伴うエネルギー消費に変換し，地震外乱や風外乱に起因する振動を抑制する制振機構の開発が積極的に取り入れられている。また，地盤からの振動伝達を低減し，地震動の揺れから上部構造物を切り離す免震構造の導入などといった設計方法も模索されており，近年ではそれらの実用化例が多数存在する。このような制振構造や免震構造を実現するには設計用地震動を適切に設定する必要があるが，地震動は地盤特性のばらつき等に起因する種々の不確定性を有しており，地震発生の時間・場所および地震動の特性を予測することは現在でもなお困難である。このように，地動外乱が大きなばらつきや不確定性を有する状況下で，耐震設計された構造物や制振・免震装置を有する構造物の安全性を的確に評価することには種々の問題が伴う。さらに，建築構造物はその特性上，剛性・強度や減衰性能が設計された公称値に対して少なからずばらつきを有していることも考えられ，地震動入力特性のみならず構造物特性の不確定性が構造物応答に及ぼす影響についても評価する必要がある。

本論文では，種々の不確定性が構造物応答に及ぼす影響に着目し，次のような問題を扱う。

(A)　地震動入力の不確定性を考慮した極限外乱問題

(B)　地震動入力の不確定性を考慮したもとでのダンパー配置に関する最適設計問題

(C)　構造物特性の不確定性を考慮したロバスト性評価

本節では，それぞれの研究テーマに関する研究背景やその関連性について言及する。

1.1.1　地震動の不確定性を考慮した極限外乱問題

<u>地震動の多次元性</u>

地震動が有する不確定性の要因には種々のものが存在する(図 1-1)。地震動が有する不確定性の一つとして地震動の多次元性が挙げられる。建築構造物に入力される地震動は一般に 3 次元の動的な現象であり，地震動入力を受ける実際の建築構造物は多次元(水平 2 方向，上下方向，さらには回転方向(ねじれ振動)）の挙動を示す。このような地震動の多次元性を考慮する問題を一般的に多成分入力問題という。地震動の水平 2 方向成分が異なる特性を有する原因としては，種々の要因が考えられる。主要動における水平方向の地動の揺れは，伝播方向に垂直な振動方向を有する S 波が比較的柔らかい表層地盤を通過し地表面に対してほぼ垂直に入射されることに起因する。S 波には SV 波と SH 波の 2 種類が存在し，震源位置と観測点ならびに対象とする構造物の架構形式によっては，SV 波ならびに SH 波がそれぞれ卓越した入力が構造物の主たる架構面に作用することも考えられる。また，S 波の後に観測される比較的長周期の地震波は，S 波が早期に地表面に到達した際に生じる表面波であり，Love 波と Rayleigh 波が地域特性に依存して発生する。表面波においても前述と同様に，観測点によっては水平 2 方向成分においてそれぞれが卓越する波が個別に入力されることが想定さ

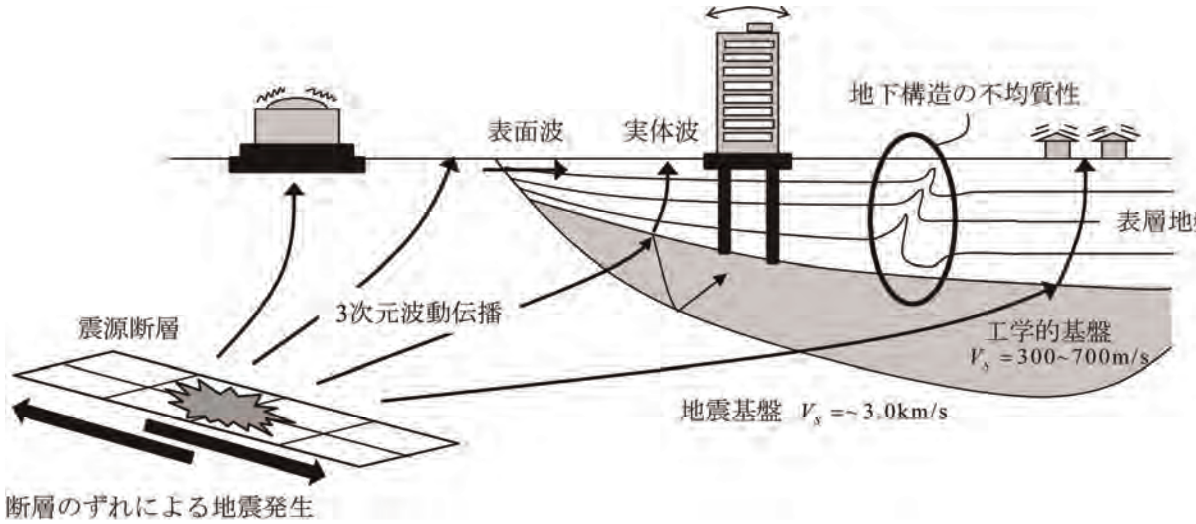


図 1-1 地震動の伝播における地震外乱の不確定性

れる。また，地下構造の複雑さは多次元地震動の不確定性を増幅させる一つの要因である。例えば，せん断波速度が著しく遅い軟弱な堆積盆地では，周辺の硬質な地盤に比べて表面波が卓越しやすい。メキシコ地震(1985 年)では，震源近傍域の海岸段丘上でほぼ無被害であったにも関わらず，震源から 350km 離れたメキシコ・シティーの堆積盆地内では，特定の層数(10 層前後)の集合住宅が倒壊・大破するなどの甚大な損害を被り，多くの人命が失われた。これは，メキシコ・シティーの軟弱な堆積地盤により長周期成分が卓越したために，共振現象を引き起こしたためと考えられている。また，小山ら(1992)は，1984 年長野県西部地震において後続の表面波が明瞭に分離されて観測されたことに着目し，地盤の 3 次元的な地下構造によっては S 波と後続の表面波では震動方向が観測位置により異なることも報告している。

3 次元の挙動を伴った地震入力を受ける現実の建築構造物は多次元性を有する挙動を示すため，多成分入力問題を設計時に考慮する必要性は以前から指摘されてきた。1995 年の兵庫県南部地震の甚大な被害を受けて，衝撃的な入力や水平方向および鉛直方向の地震動同時入力の発生可能性について様々な議論が行われた(第 2 回『多次元入力地震動と構造物多次元挙動に関するシンポジウム』-主に兵庫県南部地震の地震被害に学ぶ)。これらの成果は"多成分入力地震動と構造物の応答" (日本建築学会, 1998)にまとめられており，当該文献では，現存する S 造 18 層高層建築構造物において観測された地震観測記録に基づいて，多次元性を考慮すべき応答量であるせん断力や変動軸力における重ね合わせについてシミュレーション解析により得られた応答値と観測値を照合し，多成分入力が柱の変動軸力に及ぼす影響が大きいことを指摘している。また，地震動の多次元性が構造物応答に及ぼす影響に関して，水平 2 方向の地動成分間の相関性を表すコヒーレンスと変動軸力には比例的な関係があると指摘している。

多次元地震動に対する応答評価手法の問題点

建築構造物を設計する際には，地震動の多次元性などの不確定要素を考慮することが望ましいと考えられるが，中規模程度の建物であれば建築構造物の主たる構面に 1 方向入力の外乱を考慮したうえで構造物の安全性評価を行われていることが慣例的である。また，超高層建築構造物や原子炉建屋などに代表される重要建築構造物においても，構造物を詳細にモデル化した上で多次元応答解析

に基づいた安全性評価が行われることは稀である。

地震動の多次元性を考慮した現状の簡易的な応答評価手法として，SRSS 法（**S**quare **R**oot of **S**um of the **S**quares），CQC 法(=**C**omplete **Q**uadratic **C**ombination)が存在し，さらに，地動主軸を仮定した Penzien-Watabe モデルに基づき多次元入力地震動の相関性を考慮した応答評価法として CQC 法を拡張した CQC3 法(=**C**omplete **Q**uadratic **C**ombination with **3**components)も挙げられる。それぞれの応答評価手法の特徴は次のようにまとめられる。

SRSS 法は，E. Rosenblueth(1951)が提唱したもので，多質点系の時刻歴応答解析の最大値を評価する際にモーダルアナリシスで分解された各モードの最大値を 2 乗和平方根で近似することができるというものである。SRSS 法は，モーダルアナリシスに適用する場合において，各次のモード間に相関性が見られない場合には極めて精度がよい評価法である。多成分入力地震動に対する応答評価においても，部材応力等の評価に必要な各方向の地震動入力に対する構造物応答の和の最大値を推定する方法として各方向入力に対する構造物応答の最大値の 2 乗和平方根が頻繁に適用される。しかしながら，SRSS 法では，各方向の地震動入力に対する構造物応答の最大値が同時刻に起きないという暗黙の前提に基づいている。従って，多成分同時入力時における最大応答を SRSS 法により評価することは，地震動入力に依存して生じる応答の位相関係によっては危険側となると考えられる。すなわち， SRSS 法では多成分入力時において各方向の応答を独立に解析しているために，各方向の地震動入力の成分間の相関関係が応答に及ぼす影響を考慮できない。本来，水平動と上下動，もしくは水平 2 方向同時入力を考慮する多成分入力問題では，それぞれの入力地震動が同時に建築構造物に入力され，一方の入力地震動が他方向入力地震動に対する応答量に影響を与える相関関係を

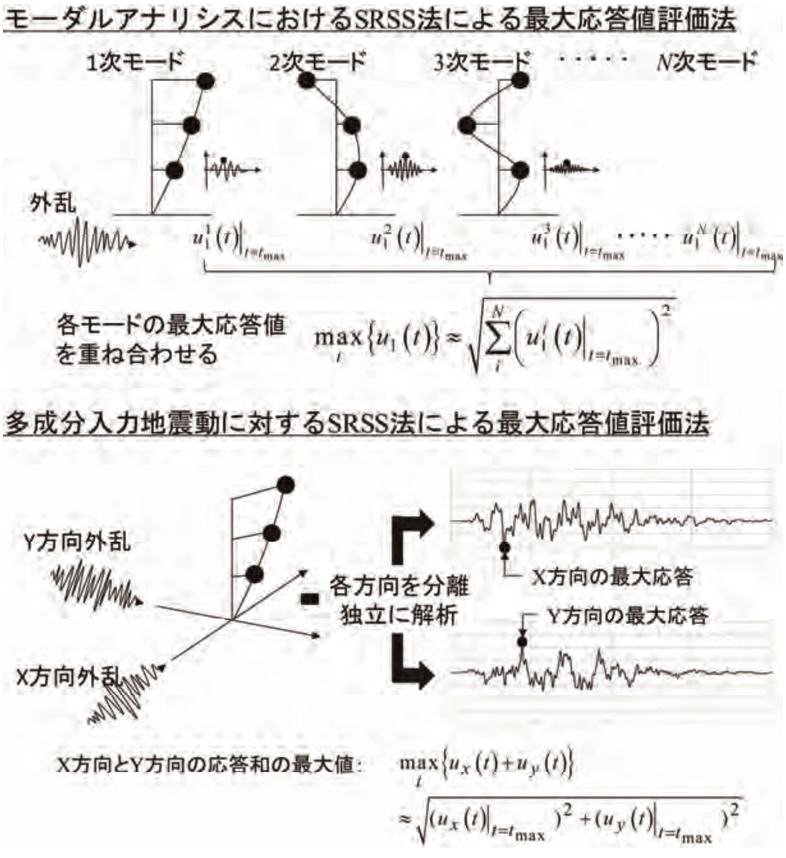


図 1-2 SRSS 法による応答評価法の概要

考慮すべきである。図 1-2 では，上記で説明した SRSS 法の概要を図に示した。

また，CQC 法は Der Kiureghian ら(1981)により提案されたものであり，モーダルアナリシスによる応答評価を行う上で SRSS 法では考慮できなかったモード間の相関関係を新たに考慮した応答評価手法である。本手法では，各モードの固有円振動数の比および各モードの減衰定数の関数とする相関係数により，モード間の相関による影響を考慮することが可能である。これにより，SRSS 法では真の応答値に比べて過小評価されてしまう場合，すなわちモード間の相関が無視できない場合には，極めて精度のよい応答が得られることを示している。一方，Smeby，Der Kiureghian(1985)は，前述の CQC 法を拡張し多成分入力地震動を受ける構造物の応答の重ね合わせにおける応答評価法として CQC3 法を提案している。CQC3 法では，地動主軸を仮定した Penzien-Watabe モデルに基づいて，多成分入力地震動の入射方向を考慮している。Penzien-Watabe モデルとは，Penzien，Watabe ら(1975)が提唱したもので，地震動には直交する 2 軸において互いに無相関な地動成分を有する地動主軸が存在するというものである。Penzien-Watabe モデルにおける主要なパラメターは，建物軸方向と地動主軸方向との角度のずれ，すなわち地動入力の建物に対する入射角と地動主軸ならびに地動主軸と直交する軸方向に沿った地動成分のパワースペクトルの比率である。地動主軸から建物軸へ地動外乱が入力される際には，建物軸の各方向(X 構面，Y 構面）に地動成分が分配される。Penzien，Watabe ら(1975)は，建物軸各方向に分配された地動成分間の相関性を表すコヒーレンスが前述の二つのパラメターにより決定されることを示しており，CQC3 法は入力方向の違いによる入力の相関の強さ，すなわち建物軸方向に分配された地動成分間のコヒーレンスを反映させた応答評価手法である。しかしながら，CQC 法ならびに CQC3 法は，いずれも最大応答値の重ね合わせという意味で応答スペクトル法を基準としており，地動成分間のコヒーレンス（相関関数の絶対値）のみ扱うため，相関関係を厳密に扱っているとは言い難い。

<u>極限外乱問題</u>

地震工学の立場に基づけば，対象とする地域で起こりうる地震動の特性をあらかじめ予測することは，地震動を受ける構造物の安全性を確保するための対策を実施する上で極めて有益である。そこで近年では，原子炉建屋等の重要建築構造物などの設計では，地域特性を考慮した種々の地震動に対して構造的安全性を詳細に検討することが要求される。例えば，対象とする構造物周辺のサイト特性を考慮したサイト波が作成され，時刻歴応答解析を行うことは一般的になりつつある。

このような状況下において，サイト波を含む設計用地震動の強さや振動数特性を明確にすることは，社会的にも強く要求されており，数多くの研究成果が報告されている。構造物の設計において想定すべき設計用地震動を理論的に決める基本的な要素は，震源特性，伝播特性および地盤増幅特性の 3 つである。これらの 3 つの特性を考慮した上で，設計用地震動を作成する方法として種々の方法が提案されている。すなわち，(1) 既往の観測波のスペクトルを必要に応じて補正する方法や距離減衰式によりターゲット応答スペクトルを評価し，適切な経時特性を付与して地震波を作成する方法（経験的手法）。(2) 対象とするサイト周辺で観測された既往の中小地震波において震源特性を大地震の特性に置き換え補正する経験的グリーン関数法や統計的グリーン関数法などに代表される半経験的手法。(3) 前述の 3 つの要素をすべてモデル化し，波動方程式に基づいて理論的に地震波を作成する理論的手法。その他にも半経験的手法と理論的手法を統合したハイブリッド合成法なども存在する。このように作成された設計用地震波の妥当性の検証には，既往の観測記録から得られた

地震動の距離減衰式と比較を行う方法などが挙げられる。対象とするサイト特性を考慮した上で，設計時に考慮すべき標準的地震動として採用することは非常に有用であるといえる。しかしながら，震源特性，伝播特性，地盤増幅特性をどの程度の精度で把握できるかが問題であり，再現期間が数百（数千）年単位の極めて規模の大きな地震動に関する観測記録の蓄積が少ない現状においては，相当程度のばらつきを有するといっても過言ではない。

以上のように複雑な地下構造や伝播経路に起因して地震動そのものが極めて大きな不確定性を有することは避けられない事実である。さらに，前項で記したように，地震動の多次元性が構造物に及ぼす影響を考慮すれば問題がさらに複雑となる。従って，今後起こりうる地震動を工学的知見に基づいてどのように設定し，現実の設計問題に適用するかということは，早急に解決が望まれている課題である。このような問題に対する一つのアプローチとして，対象とする建築構造物が経験する可能性の高い地震動群の中で構造物の応答が最大となる最も危険な地震動の特性を明らかにする方法がある。このような地震動を“極限外乱”(Critical excitation) といい，極限外乱を明示することができれば，構造物が今後経験し得る最大応答を精度よくシミュレートすることが可能であり，極限外乱に対して対象とする建築構造物が満たすべき構造性能を明確に設定することにより，生起の予測が困難である極めて規模の大きな地震動に対しても構造物の安全性を確保することが可能であると期待される。このような問題を“極限外乱問題”(Critical excitation method)という。

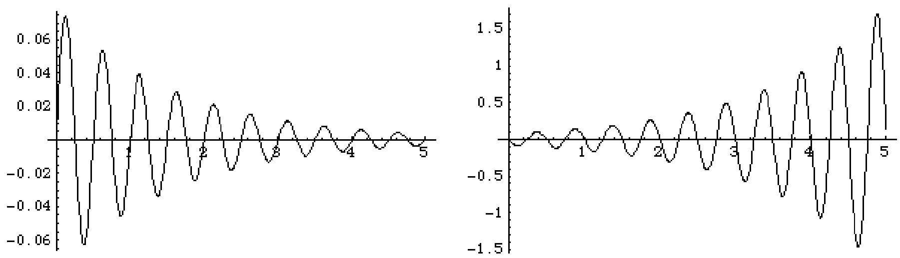
構造物にとって極限外乱問題に基づいて得られる最悪な入力地震動の生起可能性については，周辺地盤構造や，波動伝播等の高度な工学的判断の下で詳細な検証が必要であり，議論の余地が存在する。しかしながら，2011 年 3 月 11 日に発生した東北地方太平洋沖地震で甚大な被害を被った原子炉建屋の事例からも明らかなように，原子炉建屋や超高層建築構造物などの重要建築構造物に対して最も危険な応答となる入力地震動の特性を規定することで"想定外の事態"を想定することは，極めて重要であると考えられる。また，極限外乱は詳細な地下構造モデルや震源モデル等により構築されるサイト波とは異なり，構造物特性にも大きく依存し構造物の種別に応じて極限外乱の特性が異なることが特徴である(図 1-3)。

図 1-3 構造物に依存する極限外乱の概要

極限外乱問題に関する既往の研究

極限外乱問題については，これまでにも多数の研究成果が蓄積されている。Drenick(1970) は，地動加速度の 2 乗の継続時間に渡る積分値（エネルギー）が制約された許容外乱の中で，線形弾性バネおよび粘性ダンパーを有する 1 自由度モデルの変位応答を最大化する極限外乱は単位衝撃応答関数を時間軸に関して反転させた関数であることを，Cauchy-Schwarz の不等式（および変分法）を用いて誘導した(図 1-4)。またそのときの応答上界値を誘導している。Drenick が示した結果は，多少非現実的であり，論理的な重要性を示すのみであったが，Drenick が初めて提唱した極限外乱問題はその後も多くの視点に基づいて展開されてきた。Shinozuka(1970)は，Drenick の理論をさらに発展させ，地動加速度の Fourier 振幅スペクトルの関数に上限が設定された場合に，一層高精度の応答上界値が得られることを示している。神田ら(1996)は，地震動の位相特性が弾塑性構造物のクリティカル性に及ぼす影響を詳細に解析している。また，竹脇(2000, 2001, 2002)は確率論に基づく地震動モデルにおいて，地震動のパワーに制約を設けたうえで，最悪なパワースペクトル密度関数を決定する問題としての極限外乱法を提唱している。これらの既往の研究は，いずれも 1 方向入力を扱うものであり，前述したような地震動の多次元性を考慮し，多成分地震動入力による入力成分間の相関関係が構造物応答に及ぼす影響を考慮した極限外乱問題は扱われてこなかった。

Sarkar と Manohar(1996)は，異なる時系列の相関関係を表すクロススペクトルに言及したうえで，多点入力を受けるケーブル構造における極限外乱問題を提唱しており，最悪な相関性に関する極限外乱問題に対する理論を展開している。ただし，Sarkar らが扱った問題は多点入力における最悪な相関性（ただしコヒーレンスのみ）に関する極限外乱問題であり，多成分同時入力問題に関して最悪な入力の相関性を扱った極限外乱理論を展開したものは見受けられない。



impulse response function　　critical excitation

図 1-4　Drenick が提示した単位衝撃応答関数とその鏡像としての極限外乱

多次元入力に関する既往の研究

地震動の多成分同時入力に関する既往研究としては，次のようなものが挙げられる。Smeby, Der Kiureghian ら(1985)は，互いに無相関である地動主軸の存在を仮定した Penzien-Watabe モデルに基づいて，多成分入力地震動を受ける線形構造物の動的解析のための応答スペクトル法を展開し，応答量を最悪にする入射角（地動主軸と建物軸がなす角度）を陽な表現で表わした。Smeby, Der Kiureghian らが提案した多成分入力地震動に対する応答評価法は，1 方向入力における応答のモード間の相関を考慮可能な方法であり，CQC 法を拡張したものとして CQC3 法と呼称される。

CQC3 法が提案されて以降，関連する多くの研究がなされた。Menun，Der Kiureghian (1998) は，

多くの設計指針で用いられているSRSS法および30%および40%の応答増加率を仮定した簡易的な応答評価法と CQC3 法による応答評価について，水平 2 方向入力を受ける橋梁構造物の柱に作用する曲げモーメント応答について詳細な比較を行い，CQC3 法による応答評価の優位性を示している。また，Lopez と Chopra ら(2000)は，3 つの無次元パラメターについて CQC3 法と SRSS 応答評価法による両者の違いについて考察を行い，両者の方法によって計算される応答の比率（CQC3 法による最悪な入射角度に対する応答／SRSS 応答評価法による応答）が最大でも $\sqrt{2}$ を超えないことを明らかにしている。しかしながら，CQC3 法は前述したように，地動成分間のコヒーレンスを用いた各方向最大応答値の重ね合わせという意味では応答スペクトル法に準ずるものであるため，地震動の時間領域での各成分間の相関関係を厳密に取り扱うことが困難であるといえる。

1.1.2　地震動の不確定性を考慮したパッシブダンパーの最適配置問題

<u>最適ダンパー配置問題</u>

極限外乱問題は入力外乱の不確定性に対する有効なアプローチであると考えられる。1.1.1 節では，地震動外乱の不確定性の一つである地震動の多次元性に着目し，多次元入力地震動に対する応答評価法の問題点について言及した。しかしながら，データの蓄積と分析に基づき構築されていく地震工学の性格上，入力地震動の不確定性は今後も完全に拭い去ることは困難である。従って，超高層建築構造物などの重要な構造物に対するリスク評価は，特に慎重にならざるを得ない。超高層建築構造物等では地震による構造物の振動制御を目的として，種々の制振装置を適切に用いて揺れを低減する構造システムを構成することが積極的に行われている。なかでも地震外乱による入力エネルギーを構造物の層間変位により粘性体，粘弾性体，鋼材ダンパーなどの変形による熱エネルギー・履歴エネルギー等に変換し，入力エネルギーを低減するいわゆるパッシブ系ダンパーは，導入が容易であり且つ安定した性能を発揮することが利点である。

制振技術の発展において初期の段階(1980 年代)では，制振装置の動特性や減衰性能を把握することに主眼が置かれ，減衰性能の高効率化を実現することで実用化に至っており，新材料や新しい減衰機構の開発は現在もなお継続的に行われている。一方，このような制振装置を建築構造物に導入する際には，ダンパーの付加量や配置効果による応答低減効果の違いを明確にし，適切な位置に適切な量のダンパーを配置することが経済性という観点において望ましいと考えられる。このように最適設計の思想に基づいて制振ダンパーの配置を扱う問題は，一般的に最適ダンパー配置問題と呼ばれ，設計問題への実用化も多数報告されている。ダンパー配置に関する最適化問題においては，特定の構造物応答を目的関数とし，構造物応答が指定された性能クライテリアを満足するようなダンパー配置を模索する。しかしながら，地震動の動特性は不確定性が強く，地震動が有する周波数特性と構造物特性の相互関係に依存して構造物応答の性状が異なることが考えられるため，現状の設計において最適な応答低減効果をもたらすと考えられているダンパー配置がその他の地震動に対して有効であるとは限らない。従って，入力外乱の不確定性を考慮したうえで将来起こりうる地震に対しても構造物の頑強性（＝ロバスト性）を保証するダンパー配置の最適化手法を展開することが強く望まれている。

最適ダンパー配置問題に関する既往の研究

パッシブ系ダンパーの最適配置問題に関する既往研究には多数の成果がある。De Silva（1981）は，勾配型最適化手法を構築してパッシブダンパーの最適減衰係数の導出を行っている。辻，中村(1996)は骨組剛性とダンパー減衰係数の同時最適化問題を展開している。竹脇(1997)は，伝達関数を用いた粘性ダンパーの最適配置問題を解いており，その他にも多くの成果を示し，それらのダンパー最適配置問題の本質を著書" Building control with passive dampers - Optimal performance-based design for earthquakes"（2009）に取りまとめている。 Singh, M.P., Moreschi, L.M. (2001,2002), Lavan, O., Levy, R.ら(2004,2005)は，ラグランジュ乗数法に基づいた最適配置問題を展開している。また，Silvestri, S., Trombetti, T. (2007)は質量比例減衰の最適配置を示している。しかしながら，多くの最適ダンパー配置問題で扱われるダンパーモデルは, 粘性ダンパーのみに限定される場合がほとんどである。一方，実際に用いられるパッシブダンパーは，粘性系のみならず粘弾性特性や履歴特性を有するなど多岐にわたる。これらの種々のダンパーを用いる場合でも，ダンパー最適配置問題に対するアプローチを明快にすることは重要である。また，前述した辻，中村(1996)は入力地震動としてスペクトル適合波を用いており, その他の既往研究の多くも同様に特定の入力地震動を対象としているため, 入力地震動の不確定性を考慮した最適設計法はこれまでに明確に示されているとは言い難い。

1.1.3　構造物特性の不確定性を考慮したロバスト性評価法

種々の構造物特性のばらつきを想定する不確定性解析法

入力外乱の不確定性が構造物応答に及ぼす影響は極めて大きく, 建築構造物の設計時において想定する入力外乱の特性や規模の選定には十分に留意する必要がある。建築構造物の設計においては，構造形式や建築材料を適宜選定した上で, 選定された入力外乱に対する構造物応答が性能クライテリアを満足することが要求される。入力外乱の不確定性を考慮するためには，前述したように極限外乱法の理念に基づいた最悪な入力特性を見出すことが有効なアプローチとなると考えられる。しかしながら，構造物応答の特性は入力外乱の特性のみならず構造物特性にも依存する。構造物応答を評価する際に用いられる構造物の剛性や減衰係数，強度，復元力特性などの種々の物理パラメターはいわゆる公称値であり，実際には少なからずばらつきが生じることも想定される。特に，建築構造物には様々な部材や構造材料が複合的に用いられるため, 構造物特性のばらつきが構造物の性能(例えば耐震性, 変形性能)の変化に密接に関連する。従って，性能の均一性が保証される工業製品とは異なり，建築構造物における構造物パラメターの不確定性が構造性能に及ぼす影響について定量的に把握する必要がある。例えば，免震構造に採用される種々の積層ゴムアイソレータやダンパーについては，材料物性のばらつき，製作誤差，温度・振動数依存性等に起因した製品のばらつきや経年による特性変化が顕著であり, 設計時にはこれらも含めた構造物パラメターの不確定性が免震性能に及ぼす影響について検討を行う必要があることが指摘されている(日本免震構造協会, 2010)。

構造物特性の不確定性を考慮し，構造物応答・性能のばらつきを評価する手法を一般的に不確定性解析法(Uncertainty analysis)という。不確定性解析法における不確定パラメターを特徴づける不確定性モデルとしては，確率論的モデルと非確率論的モデルの 2 つが挙げられる。確率論的不確定性モデルは，不確定パラメターのばらつきをガウス分布等で定義し，構造物の性能制約が満たされない確率を

扱う信頼性設計法に用いられる。しかしながら，構造材料に依存してばらつきの度合いが異なるため個々の構造物パラメターのばらつきを精度よく評価することは困難である。一方，非確率論的不確定性モデルとしては，凸モデル解析がよく用いられている。凸モデル解析では，構造物パラメターの変動領域を楕円で近似する凸モデル(Convex model)が用いられる。また，構造物パラメターの変動領域を区間モデルで与え，不確定パラメターの変動の上下限幅を指定したもとで構造物応答のばらつきの上下限を推定する区間解析法も有力な方法の一つである。これらの非確率論的不確定性モデルでは，ばらつきが想定される構造物パラメターの変動領域を指定するため不確定パラメターのばらつきを与える確率分布が不要である。

<u>不確定解析法に関する既往の研究</u>

これまでに不確定性解析法には様々な方法が考案されており，多くの研究成果が存在する。

古典的な不確定性解析法としては区間解析法が挙げられ，現在においても構造物パタメターの不確定性に対する応答のばらつきを評価する手法として多くの分野で用いられている。初期の段階の研究として，Moore (1966)は区間解析法の概念を提唱している。また，Alefeld, Herzberger (1983)により区間変数同士の四則演算法則(Interval arithmetic)を利用した区間解析法を固有値問題のばらつき解析に適用する手法が提示されている。Alefeld らの先駆的功績により，Interval arithmetic を用いた区間解析法は，構造物の静的変位や動的応答のばらつきを評価するといった工学上の様々な問題に適用されている(例えば，Qie ら(1996), Mullen(1999))。Interval arithmetic に基づく区間解析法に関する研究の多くは，剛性行列の逆行列をノイマン級数展開する方法や，変動する変位応答を収束級数により展開する方法などを用いて構造物応答を近似することで Interval arithmetic を適用した際の誤差を低減することを目的としている。

一方，Interval arithmetic を用いない区間解析法として，Chen ら(2009)は目的関数を Taylor 級数展開の 2 次近似で表わす際に 2 次微係数の非対角成分を無視する方法を提案している。この方法では，不確定パラメターの端点の組み合せを総当たりで解析する Vertex 法(Dong, Shah (1987))において，ある程度ばらつきが大きい場合においても精度の低下を防ぐことが可能であり，さらに計算負荷を大きく低減することが可能であることを示している。しかしながら，Vertex 法では，目的関数が不確定パラメターの変動領域内において単調であること(いわゆる凸性)が仮定され，変動領域内において極値を有する問題に対して適用することは評価誤差が顕著となる場合が考えられる。また Vertex 法は不確定パラメターの数が増えると変動領域の端点の組み合せが指数関数的に増えるため，実用的な問題に適用することが困難となるという問題が生じる。

上記の多くの問題では，静的な外力を受ける問題や，固有値解析などを扱っているのに対して，地震時の構造物応答を目的関数とした場合，地震動の振動数特性の影響により構造物パラメターの変動に対する構造物応答の単調性を仮定することは難しい。また，時刻歴応答解析により評価される地震時最大応答値に関する不確定性解析法はこれまでに提示されていない。

1.2　研究の目的

本論文の目的は以下の通りである。

(1) 多成分入力地震動の相関性に着目した極限外乱法の展開

水平 2 方向同時入力や水平上下同時入力等の多成分入力地震動を受ける骨組構造物を対象とし，多成分入力地震動下の応答量に関する極限外乱法を展開する。2 つの異なる時系列の相関関係を表す重要な指標としてクロスパワースペクトル密度関数（以下 Cross PSD 関数と記す）があり，本論文でも重要な役割を果たす。Cross PSD 関数は，時間領域における 2 つの異なる時系列成分の位相関係を決定づける複素表現の量であり，本論文で扱う多成分入力地震動に対する極限外乱問題では未知量として扱われる。本極限外乱問題の特徴は，現実的な地震動の制約条件(例えば，パワースペクトル密度関数）を考慮した上で，対象とする応答量を最大化する多成分入力地震動の最悪な Cross PSD 関数の特性を明らかにすることである。極めて不確定性の高い地震波において，最悪な位相成分を有する多成分入力地震動の特徴を抽出することができれば，多成分入力を考慮したより信頼性の高い安全性評価を行うことができる。

図 1-5 は本極限外乱法により得られる成果の概要を図示したものである。例えば，水平 2 方向同時入力を想定する際に, 45°方向入力を考えることがある。この場合には，Cross PSD 関数の位相角(＝フェイズ)は 0 である。一方，本極限外乱問題では振動数と共に変化する最悪な Cross PSD 関数を求めることにより，時間領域で特定の位相差を有する多成分入力地震動を見出すことが可能である。多次元入力の影響を受ける構造物応答としては，部材応力(曲げモーメント等)が挙げられる。各方向

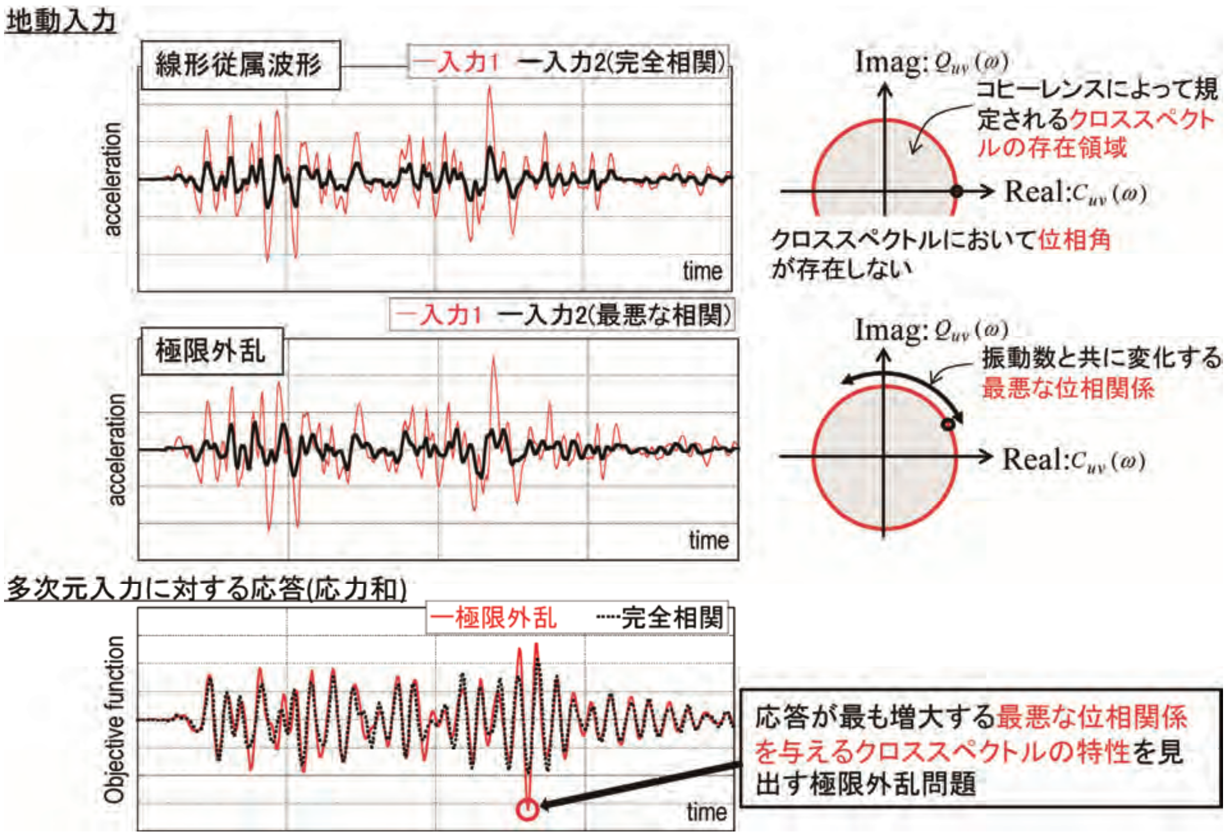


図 1-5 線形従属の波形と極限外乱との比較

の入力に対する最大応答値を比較すれば，線形従属の関係にある多次元入力地震動(45 度方向入力に相当) に対する応答に対して極限外乱に対する応答は，増大していることが確認できる。本極限外乱法では，構造物の振動特性と関連付けられる入力地震地震動の成分間の最悪な相関性を見出すことで，多次元入力地震動に対する地震時応答評価の信頼性を向上することが可能である。

(2) 極限外乱を用いた制振ダンパーおよび支持部材の最適設計法の構築

不確定な入力地震動下において粘性ダンパーや粘弾性ダンパーに代表されるパッシブ系ダンパーの最適配置問題を扱い，その解法アルゴリズムを展開する。最適ダンパー配置問題において入力地震動外乱の特性が最適解に及ぼす影響は少なくない。そこで本論文では，入力地震動の不確定性を考慮するために，入力地震動外乱の特性として構造物にとって共振的な入力となる極限地震動外乱を用いる。これは，極限的な入力に対してダンパーを適切に配置することにより，外乱の不確定性に依存して変動する応答を規定の性能クライテリア内におさめることが可能であるという仮定に基づく。図 1-6 は，地動外乱の不確定性による応答のばらつきとダンパー配置の関係(図 1-6 左)，および本論文で扱う極限外乱を用いた最適ダンパー配置問題の概要(図 1-6 右)を図示したものである。

また，パッシブダンパーによる応答低減効果は，ダンパーを支持する取り付け部材や機構（以下支持部材）の性能，すなわち支持部材剛性により大きく異なることが知られている。ダンパーの容量が増大すると，支持部材に作用する軸力も増大する。過大な応力が支持部材に作用すると支持部材が降伏し，耐力の低下を招いてしまうことも考えられる。このような現象が生じるとダンパーの性能を十分に発揮することができない。本論文では粘弾性ダンパーを扱い，各層の粘弾性ダンパー面積ならびに支持部材剛性を設計変数として，これらを同時に最適化する最適設計問題に対する定式化を示す。

極限外乱の特性は構造物特性に大きく依存するため，粘弾性ダンパーや支持部材剛性の配置によって建物の構造特性が変動した場合では，極限外乱の特性もそれに追随して変化する。このような外乱モデルを変動極限外乱と称する。本論文では，変動極限外乱に対して評価関数(例えば層間変位応答の総和等)を最小化する最適設計問題を定式化し，その解法アルゴリズムを構築する。

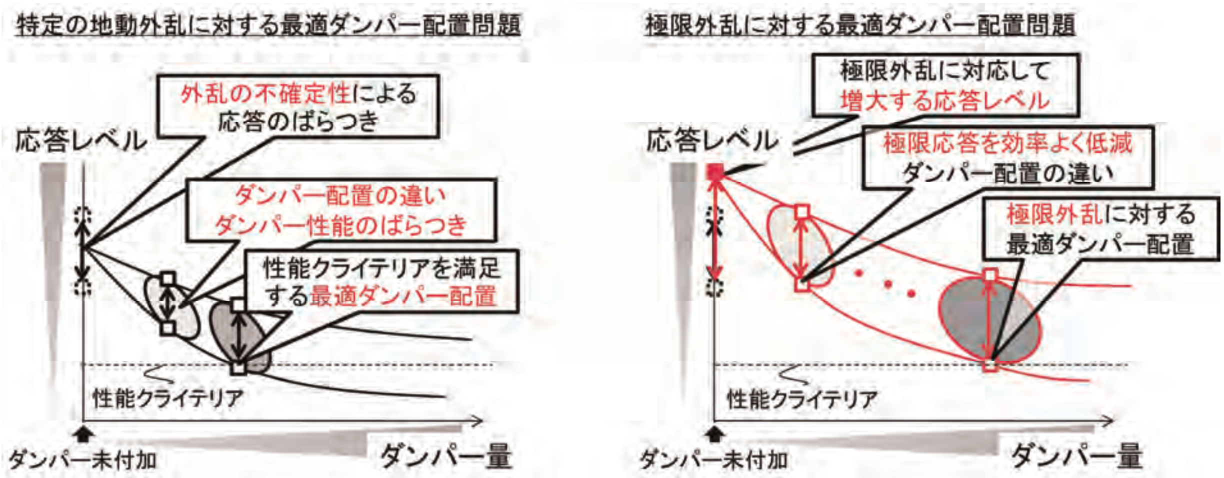


図 1-6 地動外乱の不確定性による応答のばらつきとダンパー配置の関係（左）および極限外乱を用いた最適ダンパー配置問題の概要(右)

(3) 構造物特性の不確定性を考慮した地震時応答に対するロバスト性評価法の構築

構造物特性の不確定性を考慮した際の構造物応答の頑強さを評価するロバスト性評価手法（＝不確定性解析法）を提案する。不確定性解析法の有力な方法の一つである区間解析法では，目的関数が単調性を有する(=凸性:Convexity)ということが仮定されることが多く，これを Inclusion-monotonic 仮定という。図 1-7 は，2 つの不確定パラメターに対する目的関数の変動を示したもので，目的関数の凸性を仮定した場合(図 1-7(a))では，不確定パラメターの端点の組み合せにおいて目的関数の上限値が生じる。しかしながら，地震時応答を対象とする場合では，入力外乱の特性に依存して不確定パラメターの変動領域内において目的関数が極値を有する場合も考えられる(図 1-7(b))。このような場合には従来の区間解析法に基づいて目的関数のばらつきの上限値を評価することは困難である。一方，本提案手法では, 不確定パラメターの変動領域内において目的関数が極値を有することを想定したうえで, 目的関数の上下限値を与える不確定パラメターの組み合せを不確定パラメターの変動領域内で探索する。さらに時刻歴応答解析等の信頼性の高い応答解析により再解析を実施することで一層高精度な応答評価が可能となる。ただし，再解析を用いる方法では，計算負荷の低減のために再解析の実行回数を極力抑えることが重要である。

不確定性解析法が対象とする構造物応答は任意であるが, ここでは地震入力を受ける免震建物の免震層水平変位および頂部絶対加速度応答の時刻歴最大値とする。免震アイソレータとしては，天然ゴム系積層ゴムアイソレータおよび鉛プラグ入り積層ゴムアイソレータを対象とする。前者は，線形の復元力特性を有するため，線形の時刻歴応答解析で地震時応答を評価することが可能であるが，後者は一般に非線形の復元力特性を有し，弾塑性時刻歴応答解析を実施する必要がある。本論文では，このような種々の応答解析手法に対して汎用性を有する不確定性解析法を提案することを目的とし, 時刻歴応答解析の種別によらず信頼性の高い不確定性解析法のアルゴリズムを構築する。

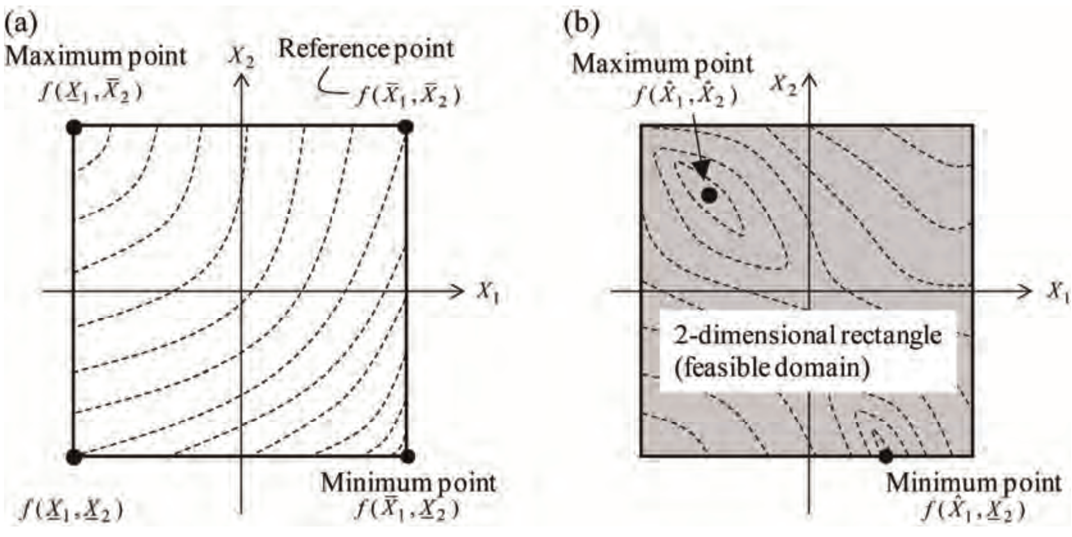


図 1-7 目的関数の上下限を与える不確定パラメターの組み合せに対する目的関数の単調性および非単調性による違い　(a) Inclusion-monotonic, (b) Non-monotonic

1.3　本論文の構成と要旨

本論文は，全 7 章より構成されている。各章における詳細は次の通りである。

第 1 章は，序論であり，本研究の目的および意義について述べている。増大する地震動レベルや地震動の多次元性にみられるような極めて不確定性の大きい状況下で, 超高層建築構造物などの重要構造物を如何に設計し，その安全性を保証するかという問題は常に議論が絶えないものであり，地震動の不確定性を考慮した明快な設計法が模索されている。本論文では, 次に記す 3 つの点を目的とする。まず，多成分入力地震動の相関性を考慮した極限外乱問題を展開し，最悪な位相特性を有する多成分地震動の特性を見出す。次に，極限外乱問題で得られた知見をもとに不確定な入力地震動に対して最適なダンパー配置問題に対する理論を展開し，合理的なダンパー配置法を提示する。最後に，入力特性のみならず構造物特性の不確定性が構造物応答に及ぼす影響について考慮し, 構造物特性の不確定性に対する構造物の頑強さ(ロバスト性)を評価する不確定性解析法を提示する。

第 2 章では，多成分入力地震動の成分間の相関性に関する極限外乱問題を提示し，その解法を展開する。まず，本極限外乱問題の定式化を行うための準備として，地震動の多次元性に関する分析を行う。具体的には，地震動のパワースペクトル（以下，Auto PSD 関数）および Cross PSD 関数を用いて種々の記録地震波の成分間のコヒーレンスについて周波数分析を行う。記録地震波の分析では，多成分入力地震動の成分間に強い相関性を有するものも多く観測されていることを明らかにしている。

第 2 章で展開する極限外乱問題では, 水平 2 方向入力の作用を受ける 1 層 1 スパン立体骨組を対象とし, 外乱モデルとしては定常ランダム過程の確率変数と振幅の経時特性を与える包絡関数との積で与えられる非定常地震動モデルを扱う。地震動モデルの振動数特性は，Auto PSD 関数によって規定し，第 2 章では，限界耐力計算における安全限界の非減衰速度応答スペクトルから算定される Auto PSD 関数を上記の Auto PSD 関数として採用する。本極限外乱問題で対象とする構造物の応答は，確率論的手法の観点から 2 軸曲げ状態にある部材応力の 2 乗平均応答とする。2 乗平均応答において入力の相関による影響を振動数領域で表わすことにより, 地動成分間の Cross PSD 関数の実部ならびに虚部を独立に扱うことが可能であることを示している。これにより，対象とする構造物にとって応答を最も増大させる最悪な Cross PSD 関数の特性を見出すことが可能となる。

第 3 章では，任意の振動数特性を有するモデルフリー地震動（地震動を規定するパラメターがすべて与えられていないという意味でモデルフリーと呼んでいる）において応答を最大化する最悪な Auto PSD 関数の組み合せを見出す極限外乱問題を展開し，極限外乱問題の解としての地震動のパラメター変動が極限応答に及ぼす影響について分析を行う。さらに，本極限外乱理論により得られた最悪な Cross PSD 関数を用いて確定的な入力に対する最悪位相差特性を有する極限外乱を見出す方法を提示する。第 2 章で展開した極限外乱問題では，地震動外乱の Auto PSD 関数をあらかじめ規定していた。しかしながら Auto PSD 関数を規定することは，将来起こりうる地震動の振動数特定を規定することに他ならないため適切とは言い難い。ここでは外乱の Auto PSD 関数を有帯域ホワイトノイズに相当する矩形状 PSD 関数で与え，任意の振動数帯域でパワーを有するモデルフリー地震動を定義する。モデルフリー地震動により各方向で異なる振動数特性を有する地震波を想定することも可能となり，建物モデルの各方向の剛性分布に依存する固有円振動数の組み合せに応じて，最悪な Auto PSD 関数の組み合せを見出す極限外乱問題を展開する。

第 4 章では, 不確定な地震動入力下でのパッシブ系制振装置を有する構造物の制振装置に関する最

適化問題を扱う。制振ダンパーとしては粘弾性ダンパーを採用する。さらに，ダンパーの性能を十分に発揮するためには, 周辺部すなわちダンパーを支持する取り付け部材を適切に設計する必要がある。そこで第 4 章では，ダンパー配置のみならず支持部材剛性をも設計変数として扱い，これらの設計変数を同時に最適化する問題を展開する。

ロバスト性を有する最適なダンパー配置を見出すうえで, 入力地震動外乱としては対象とするダンパー付構造物にとって最悪な極限外乱を想定する。具体的には，極限外乱の Auto PSD 関数の卓越振動数を構造物の固有円振動数と一致させた共振的な入力地震動を扱う。粘弾性ダンパーを設置することにより構造物に付加される剛性や支持部材の剛性が変動する場合には, 制振ダンパー付構造物の固有円振動数は少なからず影響を受ける。従って，付加ダンパーや支持部材剛性に応じて極限外乱の特性が変動する点に留意する必要がある。

第 5 章では, 評価関数を層間変位の伝達関数の最大振幅値とした粘性ダンパーの最適配置法を展開する。評価関数を構造物特性のみで記述可能な伝達関数とすることにより，第 4 章で展開した最適ダンパー配置問題に比べてより簡便な定式化が可能である。層間変位の伝達関数が最大となる層を逐次選定するため，最適化プロセスにおいて評価関数に選定される層位置が変動する場合が考えられる。この場合には，評価関数の設計変数に対する感度情報も異なるため，1 次感度（勾配ベクトル）が不連続となることに留意する必要がある。数値解析例では，多層せん断質点系建物モデルに対する最適ダンパー配置解を求め，最適配置解の性状の把握を行う。さらに，極限外乱を考慮した第 4 章の結果との比較を行い，層間変位の伝達関数を用いた最適ダンパー配置法の有用性を示す。

第 6 章では，地震入力を受ける免震構造物を対象とし，構造物特性の不確定性を考慮した免震性能に関するロバスト性評価法を展開する。提案するロバスト性評価法では，不確定性モデルとして区間モデルを採用し，Taylor 展開により近似される目的関数のばらつきの上限値を与える構造物特性の最悪な組み合せを見出した上で再解析を実施する。従来の区間解析法では，目的関数の単調性が仮定され, 不確定パラメターの端点の組み合せにおいて目的関数の上下限値が生じることを想定しているが, 本手法では Taylor 展開による 2 次近似を行うことで不確定パラメターの変動領域内において極値を取ることを考慮することが可能である。数値解析例では，線形の復元力特性を有する天然ゴム系積層アイソレータと非線形の復元力特性を有する鉛プラグ入り積層ゴムアイソレータという種別の異なるアイソレータで構成される 3 つの免震建物を対象とし, それぞれの免震建物モデルに対して免震層水平変位および頂部絶対加速度のばらつきの上下限値を推定し, 構造物特性の不確定性を考慮したロバスト性評価法の信頼性，優位性を提示する。

第 7 章は，本論文により得られた結論を総括しており，多次元地震動に対する極限外乱問題，入力地震動の不確定性を考慮したパッシブダンパーの最適設計問題および構造物特性の不確定性を考慮した免震構造物に対する地震時応答のロバスト性評価について得られた成果をそれぞれ述べる。

参考文献

Anli K. Chopra (2007). "Dynamics of Structures - Theory and Applications to Earthquake Engineering".

Chen SH, Ma L, Meng GW, Guo R. (2009). "An efficient method for evaluating the natural frequency of structures with uncertain-but-bounded parameters", *Comp Struct*, **87**, pp582-590.

C.W. De Silva (1981). "An algorithm for the optimal design of passive vibration controllers for flexible systems.", *J. Sound and Vibration* 74(4): pp495-502.Drenick, R.F. (1970). "Model-free design of aseismic structures." *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE, **96**(EM4), pp483-493.

Geller R.J., Jackson D.D., Kagan Y.Y., Mulargia, F. (1997). "Earthquakes cannot be predicted. Science", **275**, 1616.

神田　順，岩崎良二，金井宏之 (1996). "位相特性を考慮した原点指向型履歴特性を有する弾塑性系への最悪入力波に関する研究"，その 1 正弦波の位相特性の場合，日本建築学会構造系論文集，第 490 号, pp35-43.

Lavan O., Levy, R. (2005). "Optimal design of supplemental viscous dampers for irregular shear-frames in the presence of yielding", *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **34**(8), pp889-907.

Lavan O., Levy R. (2006). "Optimal design of supplemental viscous dampers for linear framed structures", *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **35**(3), pp337-356.

Lopez O., Chopra A. K., Hernandez, J.J. (2000). "Critical response of structures to multi-component earthquake excitation " *Earthq. Engeg. Struct. Dyn.*, **29**, pp1759-1778.

Menun C., Der Kiureghian A. (1998). "A replacement for the 30%, 40%, and SRSS rules for multicomponent seismic analysis." *Earthq. Spectra*, **14**(1), pp153-163.

Moore RE. (1966), "Interval analysis", Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Mullen RL, Muhanna RL.(1999), "Bounds of structural response for all possible loading combinations", *J Struct Engrg* ASCE, **125**, pp98-106.

日本建築学会(1998). "多次元入力地震動と構造物の応答".

日本建築学会(2005). "巨大地震時に予測される長周期地震動とその耐震問題", 2005 年日本建築学会大会研究協議会資料.

日本免震構造協会 (2010). "免震構造 部材の基本から設計・施工まで".

小山　信, 瀬尾　和大, 佐間野　隆憲 (1992). "熊谷地方気象台の地震観測記象に認められる顕著な後続位相", 日本建築学会構造系論文集, 第 440 号, pp133-139.

Penzien J., Watabe M. (1975). "Characteristics of 3-dimensional earthquake ground motion." *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **3**, pp365–374.

Qiu ZP, Chen SH, Song D. (1996). "The displacement bound estimation for structures with an interval description of uncertain parameters", *C Numer Meth Engng*, **12**, pp1-11.

Sarkar A., Manohar C.S. (1996). "Critical cross power spectral density functions and the highest response of multi-supported structures subjected to multi-component earthquake excitations.", *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, **25**, pp303-315.

Shinozuka M. (1970). "Maximum structural response to seismic excitations." *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE, **96**(EM5), pp729-738.

Silvestri S., Trombetti T. (2007). "Physical and numerical approaches for the optimal insertion of seismic viscous dampers in shear-type structures", *J. Earthq. Eng.*, **11**(5), pp787-828.

Singh M.P., Moreschi L.M. (2001). "Optimal seismic response control with dampers", *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **30**(4), pp553-572.

Smeby W., Der Kiureghian, A. (1985) "Modal combination rules for multicomponent earthquake excitation." *Earthq. Engrg. Struct.* Dyn.,**13**, pp1-12.

Singh M.P., Moreschi L.M. (2002). "Optimal placement of dampers for passive response control", *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **31**(4),pp955-976.

Takewaki I. (1997). "Optimum damper placement for minimum transfer functions.", *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, **26** (11), pp113-1124.

竹脇　出 (2000). "確率論に基づく新しい critical 外乱法", 日本建築学会構造系論文集, 第 533 号, pp69-74.

Takewaki I. (2001). "A new method for nonstationary random critical excitation." *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, **30**(4), pp519-535.

Takewaki I. (2002). "Seismic critical excitation method for robust design: A review." *J. of Struct. Engrg.*, ASCE, **128**(5), pp665-672.

Takewaki I. (2009). *Building control with passive dampers: -Optimal performance-based design for earthquakes-*. John Wiley & Sons (Asia), Singapore.

Tsuji M., Nakamura T. (1996). "Optimum viscous dampers for stiffness design of shear buildings.", *Journal of the Structural Design of Tall Buildings* **5**, pp217-234.

Wilson E. L., Der Kiureghian A., Bayo E. P. (1981). "A replacement of the SRSS method in seismic analysis." *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **9**, pp187–194.

第 2 章　水平 2 方向地震動の相関に関する極限外乱法

2.1　地震動の多次元性に関する不確定性と極限外乱問題

1995 年の兵庫県南部地震の甚大な被害を受けて，衝撃的な入力や水平・鉛直同時入力の発生可能性について様々な議論が行われ(日本建築学会，1996)，貴重な研究成果が蓄積されている。このような地震被害を受けて，建築構造物に要求される構造性能や構造安全性の評価手法は見直されてきた。特に現在では，大規模な建築構造物や超高層ビルの構造設計を行う際には，コンピューターによるシミュレーションが行われることが一般的である。しかしながら，地震工学の分野で用いることができる地震波のデータはいまだ半世紀程度しか蓄積されておらず, 設計時に用いる入力地震動の選定にはいまだ議論が存在する。

Strasser，Bommer(2009)は，PGA(:Peak Ground Acceleration)が 1G 以上もしくは PGV(:Peak Ground Velocity)が 100cm/s 以上となるような地震波のデータベースを検証することにより，極めて大きな強震を引き起こす巨大地震は，長周期で繰り返されることを提示している。しかしながら，このような規模の大きい地震に関する信頼性の高いデータの蓄積は，いまだ不十分であると言わざるを得ない。地震動の不確定性を十分に解明するには至っておらず, 不確定性の高い状況下で今後起こりうる地震動の特性を明らかにすることは急務である。

このような問題を解決する一つの方法として，対象とする建物にとって最悪な入力外乱，すなわち極限外乱(Critical Excitation)の特性を明らかにすることが挙げられる。このような問題扱う方法を極限外乱法(Critical Excitation Method)という。極限外乱法に基づいて構造物に対して最悪な入力外乱を見出すことにより，構造物が満たすべき構造性能を明確にすることが可能であると考えられる。極限外乱問題を扱う研究はこれまでにも多くの成果があり，様々なアプローチが展開されてきた。

Drenick (1970)は，地動加速度の 2 乗の継続時間に渡る積分値（エネルギー）が制約された許容外乱の中で, 線形弾性バネおよび粘性ダンパーを有する 1 自由度モデルの変位応答を最大化する極限外乱は単位衝撃応答関数を時間軸に関して反転させた関数であることを, Cauchy-Schwarz の不等式（および変分法）を用いて誘導した。Drenick が示した結果は，多少非現実的であり，論理的な重要性を示したものである。しかしながら，Drenick の功績により極限外乱問題の展望が開け，その後も多くの視点に基づいた極限外乱問題の提唱が展開されてきた。Shinozuka(1970)は，Drenick の理論をさらに発展させ，地動加速度の Fourier 振幅スペクトルの関数に上限が設定された場合に，一層高精度の応答上界値が得られることを示している。Iyengar, Manohar ら(1987)は，地震動の振幅に関する経時特性を考慮した非定常地震動モデルにおいて確率論に基づく極限外乱の導出を行っている。また，Manohar, Sarkar(1995)は，確率論に基づく地震動モデルにおいて，地震動のパワーに制約を設けたうえで，最悪なパワースペクトル密度関数を決定する問題としての極限外乱法を提唱している。竹脇(2001,2002,2004a,b,2006)は，様々なアプローチで極限外乱問題に対する理論を展開しており，極限外乱問題の本質に関するこれらの成果を著書"Critical Excitation Methods in Earthquake Engineering"にまとめている。

しかしながら, これまでに行われてきた極限外乱問題に対する研究成果の多くは 1 方向入力の地動成分のみを対象としているものがほとんどであり, 地震動の多次元性および構造物の多次元挙動を扱ったものは稀である。実際に建物に入力される地震動は，水平 2 方向入力や上下動入力といった 3

次元の成分を有した多次元入力である。従って，地震時における建物の挙動を適切に把握するためには，多次元入力地震動を扱う必要がある。地震動の多次元性が応答に及ぼす影響については，これまでにも多くの研究成果により示されている。例えば，"多成分入力地震動と構造物の応答"(日本建築学会，1998)においては地震動の多次元性が構造物に及ぼす影響について様々なアプローチによる調査・関連研究を示しており，その内容は多岐にわたる。具体的には，地震被害調査による地震動の多次元性の影響や，入力地震動モデルの構築，S 造や RC 造の様々な構造形式の建物モデルに対する詳細な数値シミュレーション結果の報告などが挙げられる。このような多次元入力地震動においては，入力成分間の相関性が問題となることがあるが, 多次元入力地震動の成分間の相関性が構造物に及ぼす影響の理論的な展開は示されていない。

超高層建築構造物や原子炉建屋に代表される重要建築構造物においては地震動の多次元性を考慮した信頼性の高い安全性評価を行う必要がある。多次元入力地震動に対する応答評価法として，SRSS 法(=Square Root of Sum of Squares)が挙げられる。SRSS 法では，多次元入力地震動に対する建物モデルの最大応答を 2 乗和平方根により重ね合わせる。SRSS 法は，応答スペクトル法に基づき簡易的に最大応答値を推定することができるため適用例も多数報告されている。しかしながら，SRSS 法は多次元入力地震動に対する構造物の最大応答が同時刻に起きないという暗黙の前提に基づいているため，入力地震動に依存して生じる応答の位相関係によっては危険側となると考えられる。Wilson, Der Kiureghian (1981)は，SRSS 法の問題点を改良し，応答の相関を考慮した CQC 法を提案している。CQC 法は，主として 1 方向入力時の応答をモーダルアナリシスにおいて各次のモード応答を重ね合わせる際のモード間の相関を考慮したものである。さらに，Smeby, Der Kiureghian(1985)は，多成分入力地震動を受ける構造物の応答の重ね合わせにおける応答評価法として CQC 法を拡張した CQC3 法を提案している。CQC3 法では，地震動には直交する 2 軸において互いに無相関となる地動成分を有する地動主軸が存在するという Penzien-Watabe モデル(Penzien, Watabe (1975))を用いている。

CQC3 法が提案されて以降，地動の入射角の違いが構造物に及ぼす影響など地震動の多次元性に関する多くの関連研究が展開されてきた。例えば Menun, Der Kiureghian (1998)は，2 方向入力を受ける橋梁構造物に対して既存の応答評価法(30%,40%ルールまたは SRSS 法)と CQC3 法による応答評価を比較し, CQC3 法によって最悪な入射角の導出を行っている。Lopez, Chopra ら(2000)は, Penzien-Watabe モデルによる相関性を有する多次元入力を対象として，CQC3 法に基づいて評価される多次元応答を最大化する最悪な入射角を見出している。しかしながら，CQC3 法は地動成分間のコヒーレンス(=相関関数の絶対値)を用いて，応答スペクトル法から得られる各方向の最大応答値を重ね合わせる方法であり，地震動の時間領域での各成分間の相関関係を厳密に取り扱うことが困難であるといえる。一方，Athanatopoulou (2005)は，Penzien-Watabe モデルを適用せず，3 次元の相関性を有する入力波に対する最悪な入射角とその応答値を解析的に見出す方法を示している。また，Ghersi, Rossi (2001)は，Penzien-Watabe モデルに基づく無相関の定常的な多次元入力に対する偏心を有する弾塑性構造物の動的挙動に関するパラメトリック解析を実施し, 弾塑性構造物に要求される塑性率を解析的に導いている。

地震動の多次元性を扱う上では，CQC3 法におけるクロス項に見られるように入力成分間の相関性が多次元応答に及ぼす影響についても考慮する必要がある。これに関連して最悪な入力地震動の相関性に関する知見を提示している既往研究もいくつか存在する。例えば，Sarker, Manohar (1996，1998)

は，多成分入力地震動の地動成分の相関性に着目した定式化を展開しているが，対象とした相関性についてはクロスパワースペクトル密度関数（以下 Cross PSD 関数）の絶対値のみであり，その複素形態であるコスペクトルならびにクオドスペクトルを含めた詳細な検討を行っていない。また，Abbas, Manohar (2002b)は，多点入力問題において入力の相関性に関する応答評価手法を展開している。

以上のように既往の研究では，地震動の多次元性に着目した上で，水平 2 方向同時入力や水平上下同時入力等の多次元入力地震動における入力地動成分の最悪な相関性に関する知見が十分に示されたとは言い難い。極めて不確定性の高い地震波において地震動の多次元性に着目した極限外乱問題の展開は多いに意義がある。従って，本章では水平 2 方向地動成分の同時入力を考慮した多次元入力問題において，構造物にとって最悪な入力地震動の成分間の相関関係を与える Cross PSD 関数を見出す極限外乱問題を提示し，極限外乱問題の定式化およびその解法アルゴリズムを展開する (藤田 ら (2008,2010))。

2.2　記録地震波における水平 2 方向成分の相関性に関する分析

水平 2 方向入力地震動の成分間の相関関係に着目した極限外乱理論を展開する前に，本節では種々の記録地震波の 2 方向成分間の相関関係に関する分析および考察を行う。すなわち，ここでは記録地震波が有する相関関係に関する不確定性について把握するとともに，本研究が扱う入力波の多成分間の相関性に関する極限外乱法の意義について提示することを目的とする。

まず地震動の多次元性を扱う上で，多成分入力地震動の成分間の相関性を定量的に評価するための既往の手法および概念を示す。図 2-1(a), (b)は，JMA 1995 (Kobe Earthquake) および Tabas 1978(Tabas Earthquake)の水平 2 方向(NS 方向，EW 方向)の時刻歴加速度成分 $\ddot{u}_{gx}(t)$ および $\ddot{u}_{gy}(t)$ をそれぞれ示したものである。図 2-1 において，各方向の入力地動成分の PGA(Peak Ground Acceleration) が生じる時刻近傍に注視すれば，JMA1995 の $\ddot{u}_{gx}(t)$ および $\ddot{u}_{gy}(t)$ がそれぞれほぼ逆位相の振動が励起されている。一方, Tabas 1978 では最大加速度となる時刻がずれており波形の形状もやや異なる。図 2-2(a),(b)は，図 2-1(a)および(b)に示した記録地震波の水平 2 方向成分をそれぞれ X 軸，Y 軸に図示したもので，地震時に上部構造物が受ける加速度入力の軌跡を表す図である。図 2-2(a)より JMA1995 は，最大加速度付近では逆位相の波形が得られているため，およそ 120°方向にやや卓越した地震動の主軸

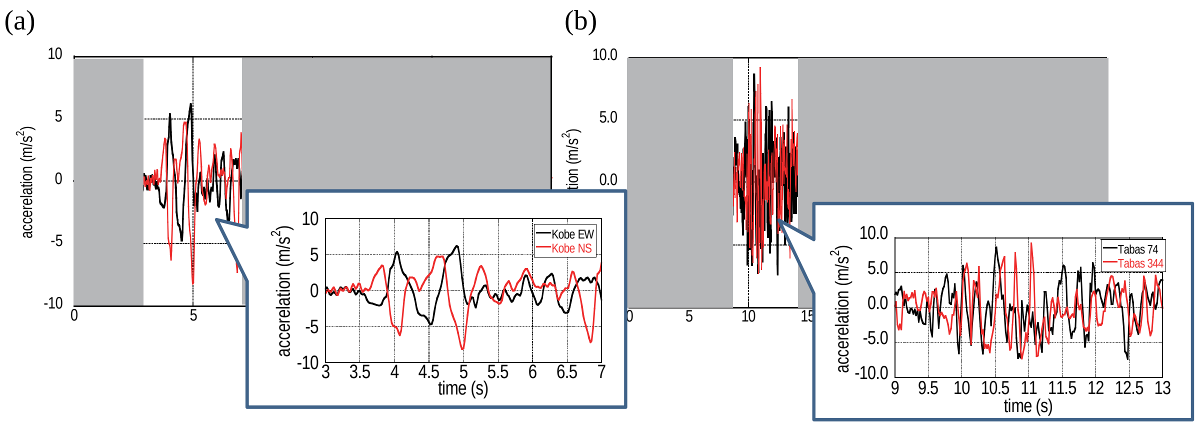


図 2-1 記録地震波の水平 2 方向成分の比較

(a) JMA 1995 (Kobe Earthquake), (b)Tabas 1978(Tabas Earthquake)

(a) (b)

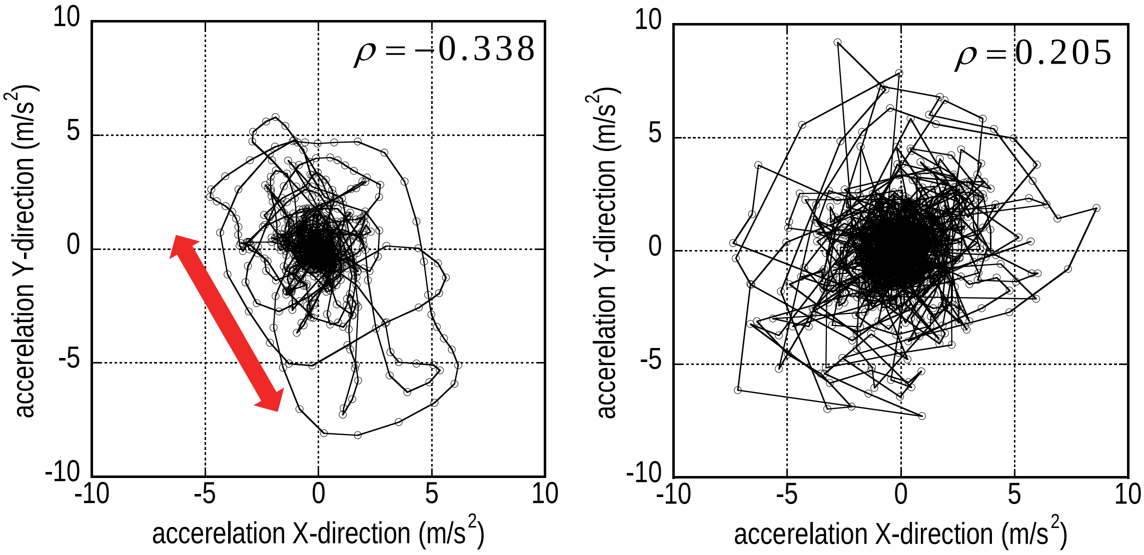


図 2-2 記録地震波の 2 方向地動成分の X-Y 水平面内挙動

(a) JMA 1995 (Kobe Earthquake), (b)Tabas 1978(Tabas Earthquake)

方向があることが分かる。一方，図 2-2(b)では，軌跡の指向性を見出すことは困難であり，特定の方向に振動しているとは言い難い。図 2-2 の図中の ρ は相関係数を表す。異なる二つの時刻歴データ $x(t_i), y(t_i)$ $(i=1,\cdots,N)$ の相関係数，は $x(t), y(t)$ の共分散を $x(t), y(t)$ の各標準偏差の積で割ったもので定義され，次式で表わされる。

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}} \tag{2-1}$$

$x(t), y(t)$ が線形従属の関係にある時，すなわち $y(t) = \alpha x(t)$ (α が定数)である時，相関係数 ρ は 1 もしくは，-1 となる。相関係数 $\rho = 1$ となる場合， $x(t)$ および $y(t)$ の軌跡は直線として現れ，強い相関性を有する。例えば，図 2-3(a),(b)に示すような経時変化を考慮し包絡関数を乗じた正弦波の組み合せは，図 2-4(a)に示す水平 2 方向成分の X-Y 平面内の軌跡が直線状に分布し，強い相関性を有しているといえる。図 2-3(a)は互いに位相差がなく，振幅のみが異なる場合($\alpha = 0.5$)で，図 2-3(b)は，位相が逆位相で振幅も異なる($\alpha = 0.5$)。一方, (2-1) 式において $x(t), y(t)$ が互いにランダムであり $\rho \approx 0$ となる時に $x(t), y(t)$ は互いに無相関であるという。例えば，互いにランダムに生成された 2 つのホワイトノイズは，ほぼ $\rho \approx 0$ となることが知られている。実際に図 2-3(c)に示す二つの異なるホワイトノイズを， 2 方向成分の X-Y 水平面内の挙動を図 2-4 (b)に図示すれば，水平面の軌跡に特定の指向性を見出すことは難しく，相関係数 ρ は 0.004 と極めて小さい。このように相関係数は，2 つの異なる時系列データにおいて時間領域における波形の類似性を見出す指標として有用である。

表 2-1 には，耐震設計時に頻繁に用いられる種々の記録地震波(El Centro, Taft, Hachinohe)，東北沖地震(2011)の築館で観測された波形および PEER Workshop により Near field Rock, Near field Soil, Far field Rock, Far field Soil の 4 種に分類された各水平 2 方向成分間の相関係数をまとめた。

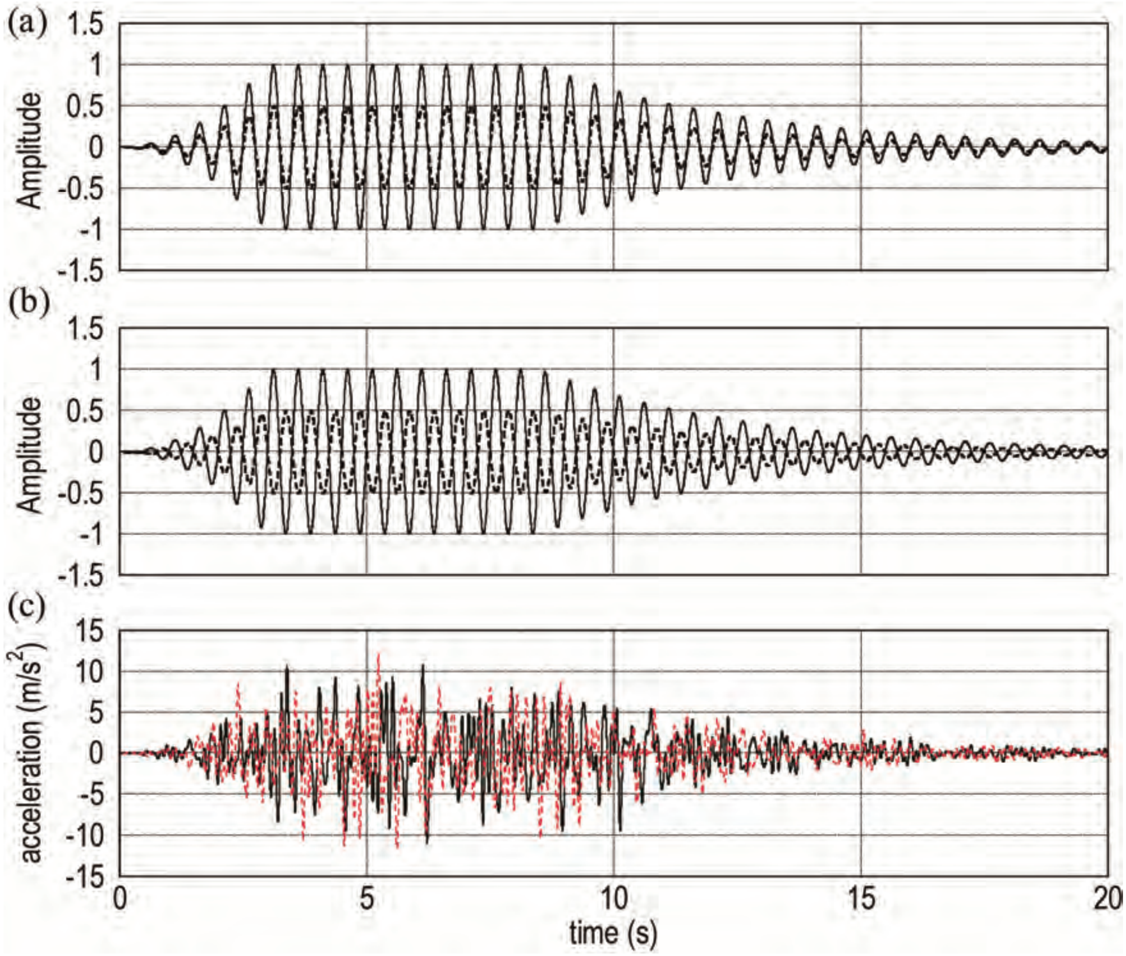


図 2-3 相関性の強い正弦波の組み合せと相関性の低いホワイトノイズの組み合せ
(a) 正弦波(位相差なし), (b)正弦波(逆位相), (c) ホワイトノイズ

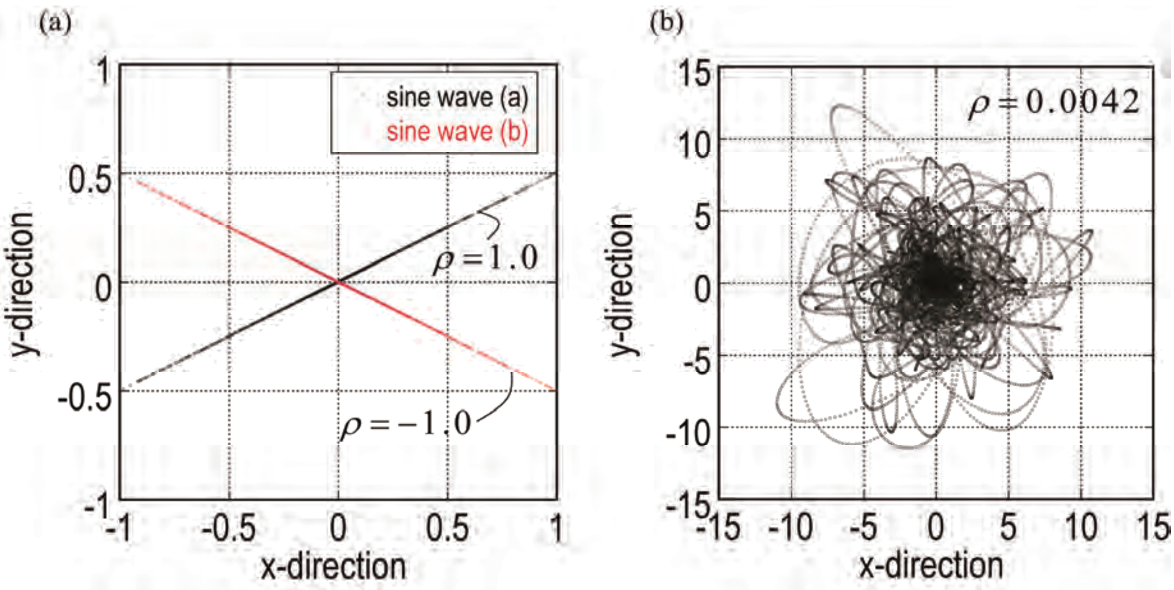


図 2-4 2 方向成分の X-Y 水平面内挙動
(a) 正弦波の組み合せ, (b) ホワイトノイズの組み合せ

表 2-1 種々の記録地震波の水平２方向成分間の相関係数に関する分析

代表的な地震波	El Centro	Taft	Hachinohe	東北沖(築館)	
相関係数 ρ	-0.1775	0.1238	0.0330	0.0426	
NR	Cape	Kobe	LGPC	LUCE	
相関係数 ρ	**0.3181**	**-0.3378**	**0.3594**	0.0595	
NS	Melo	Pet	Rina	Syl	Tabas
相関係数 ρ	**-0.4252**	-0.1135	**-0.3269**	-0.1645	0.2047
FR	Caleta	Miyagi	OCTT	VALU	
相関係数 ρ	-0.1415	0.2110	0.0046	-0.1095	
FS	Llol	SeAB	TACY	Vina	Tocka
相関係数 ρ	-0.0598	-0.0165	0.0583	**-0.4053**	-0.0015

なお表 2-1 で略記した各地震波および観測点は次の通りである。

【Near field Rock Records】

1992 Cape Mendocino Earthquake, M_w 7.0 (Cape Mendocino Record)

1995 Kobe Earthquake, M_w 6.9 (JMA Record)

1989 Loma Prieta Earthquake, M_w 6.9 (Los Gatos Presentation Center Record)

1992 Landers Earthquake, M_w 7.2, (Lucerne Record)

【Near field Soil Record】

1979 Imperial Valley Earthquake, M_w 6.5, (Meloland Record)

1992 Cape Mendocino Earthquake, M_w 7.0, (Petrolia Record)

1994 Northridge Earthquake, M_w 6.7, (Rinaldi Receiving Station Record)

1994 Northridge Earthquake, M_w 6.7, (Sylmar Converter Station Record)

1978 Tabas Earthquake, M_w 6.7, (Tabas Record)

【Far field Rock Record】

1985 Michoacan Earthquake, M_w 6.7, (Caleta de Campos Record)

1978 Miyagi-oki Earthquake, M_w 7.4, (Ofunato Bochi site Record)

1985 Michoacan Earthquake, M_w 6.7, (OCTT Record)

1985 Chile Earthquake, M_w 8.0, (VALU Record)

【Far field Soil Record】

1985 Chile Earthquake, M_w 8.0, (Llollelo Record)

1949 Olympia Earthquake, M_w 6.5, (Seattle army base Record)

1985 Michoacan Earthquake, M_w 8.1, (TACY Record)

1985 Chile Earthquake, M_w 8.0, (Vina del Mar Record)

1968 Tokachi-oki Earthquake, M_w 8.2, (Hachinohe Harbor Record)

表 2-1 において各カテゴリーの地震波群を NR,NS,FR,FS と表記することとし，上述の記述順に番号を付して地震動を表記するものとする。例えば，1995 Kobe Earthquake は，NR2 と表す。表 2-1 より，観測された種々の記録地震動の水平 2 方向成分間の相関係数は，0.0015 から 0.42 程度まで広く分布しており，相関性がやや強い波も観測されているといえる(表 2-1 で太字)。

ここまでは，異なる 2 つの時系列データ間の相関を表す指標として相関係数を扱ってきた。相関係数は，水平 2 方向成分の時系列データを X-Y 平面内に図示した軌跡における各点の分布のばらつきの度合いに対応しており，直感的に理解しやすい。一方，相関関係を定量的に評価する上で重要な関数として，相互相関関数(時間領域)とクロスパワースペクトル密度関数(振動数領域)，コヒーレンス関数およびフェイズなどが挙げられる。これらの定義や意義については後に記すが，相関係数とコヒーレンス関数の大きな違いとして挙げられるものは，前者が時系列データを対象とすることに対して，後者は振動数特性の相関性を振動数領域でのパワースペクトル密度関数(以下 Auto PSD 関数)およびクロスパワースペクトル密度関数(以下 Cross PSD 関数)から評価することにある。

例えば，図 2-3(a)に示した正弦波の組み合せにおいて全継続時間において図 2-5(a)に示すような同一の周波数(周期$T = 0.5s$)で一定の位相差を設けた場合，また図 2-5(b)に示すような 2 つの正弦波が互いに異なる周波数(周期$T = 0.5s$と周期$T = 0.7s$)を有し，なおかつ位相差もある場合について例として考える。この時の 2 方向成分の X-Y 平面内の軌跡を図 2-6(a)および(b)に示す。同一の周波数で位相差がある場合は，図 2-6(a)に示すように特定の方向に傾斜したような指向性を有する楕円状になる。図 2-5(a)の正弦波の成分間の相関係数ρは 0.0628 であり，位相差を有しない場合の相関係数に比べれば相関性は小さいとみなせる。また図 2-5(b)の正弦波の場合は$\rho = 0.0153$となる。一方，これらの正弦波の成分間のコヒーレンス関数は，周波数を横軸にとり図 2-7(a),(b)のように得られる。図 2-7(a)より，正弦波の周波数$\omega = 12.56[\mathrm{rad/s}]$付近においてコヒーレンス値が 1 となっており，強い相関性を有していることを示している。図 2-7(b)では，各正弦波の周波数が異なり，各周波数$\omega = 8.98[\mathrm{rad/s}]$，$\omega = 12.56[\mathrm{rad/s}]$においてコヒーレンス関数にピークが見られるがコヒーレンス値は 0.6 程度である。なお，図 2-7(a)および(b)において高振動数域ではコヒーレンス値が 1 に漸近しているが，入力の成分をあまり多く含まない周波数域での相関関係が応答に及ぼす影響は小さいと考えられ，入力波の卓越周波数域でのコヒーレンス値のみが有意である点に留意すべきである。

コヒーレンス関数が 1 である時，異なる 2 つの時系列データは**完全相関**であると定義される(例えば，星谷(1974))。相関係数において極めて強い相関がある，すなわち$\rho = 1$となるためには，異なる 2 つの時系列データが互いに線形従属の関係であることが必要十分条件であり，このような場合を完全相関であると見なす場合もある。しかしながら，本論文においては，完全相関であることは前者の定義，すなわちコヒーレンス関数が 1 であることと同義であるとする。従って，時間領域から評価される相関係数では，相関が弱いとされた時系列波形の組み合せにおいても，振動数領域から評価されるコヒーレンス関数が 1 になる場合には完全相関である。位相差を有する正弦波を用いた簡単な例からわかるようにコヒーレンス関数に着目することにより， 2 つの異なる時刻歴波形の成分間における振動特性上の線形性の程度（＝相関性の度合い）を抽出することが可能である。

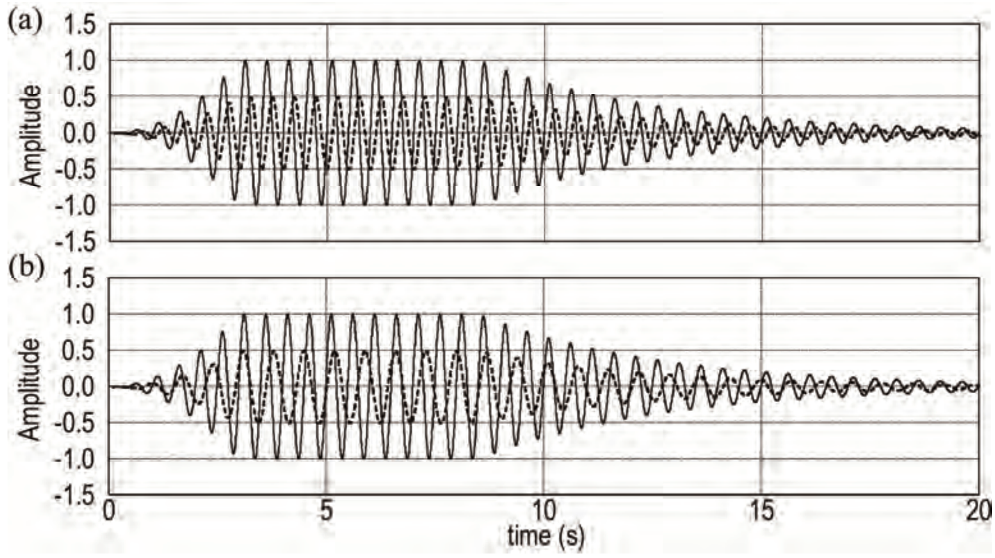


図 2-5 位相差を有する 2 つの異なる正弦波

(a) 同一周波数 2Hz 位相差 0.12s, (b) 2Hz と 1.43Hz 位相差 0.12s

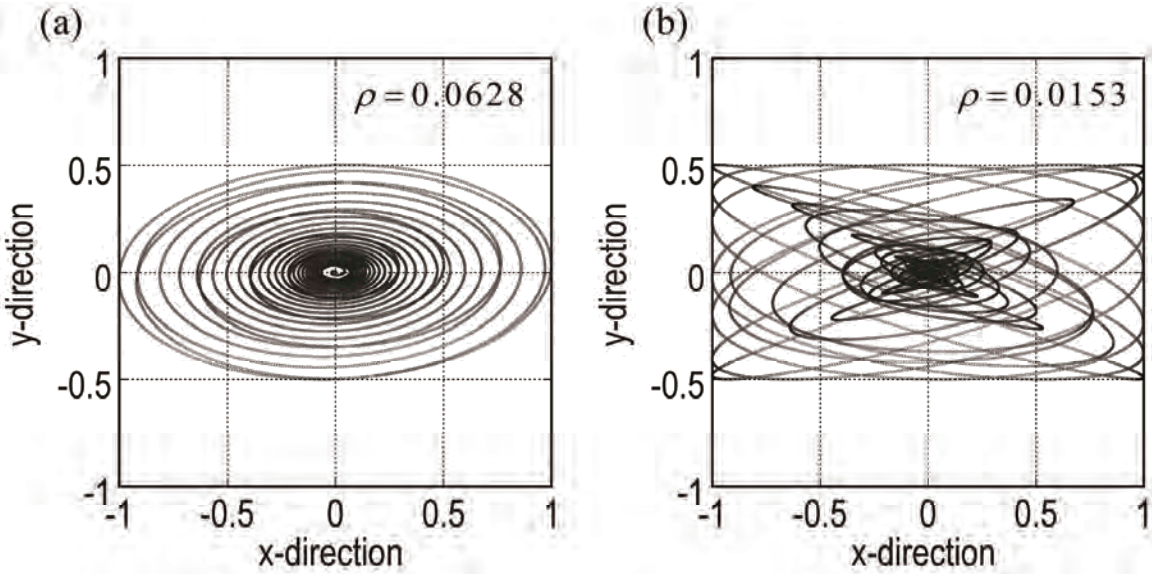


図 2-6 位相差を有する 2 つの異なる正弦波の X-Y 平面内挙動

(a) 同一周波数 2Hz 位相差 0.12s, (b) 2Hz と 1.43Hz 位相差 0.12s

ここまでは位相差を有する正弦波入力を例として相関係数とは異なるコヒーレンス関数の意義や取扱いについて示してきた。ここからは，本研究において多入力地震動の成分間の相関性を扱う上で焦点をあてることになるコヒーレンス関数やその導出に必要となる Auto PSD 関数や Cross PSD 関数について整理し，これらの基本的な定義を踏まえることとする。

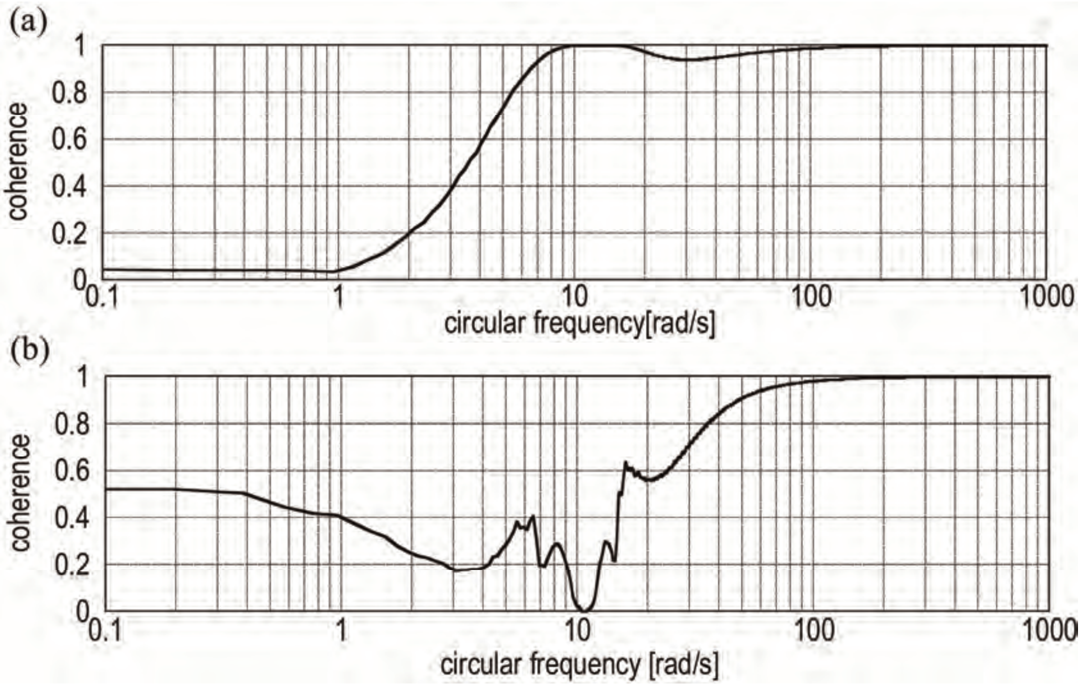


図 2-7 位相差を有する正弦波に対するコヒーレンス関数の比較

(a) 同一周波数 2Hz 位相差 0.12s, (b) 2Hz と 1.43Hz 位相差 0.12s

コヒーレンス関数の導出

任意の観測点における地動加速度成分を $\ddot{u}_{gx}(t)$ とし，当該方向を地動 X 方向と定義する。また，同一観測点において $\ddot{u}_{gx}(t)$ と直交方向(地動 Y 方向)の地動加速度成分を $\ddot{u}_{gy}(t)$ とすれば，$\ddot{u}_{gx}(t)$ に関する自己相関関数 $\varphi_{xx}(\tau)$，$\ddot{u}_{gx}(t)$ および $\ddot{u}_{gy}(t)$ に関する相互相関関数 $\varphi_{xy}(\tau)$ は次式で定義される。

$$\varphi_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{u}_{gx}(t)\ddot{u}_{gx}(t+\tau)dt \qquad (2\text{-}2)$$

$$\varphi_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{u}_{gx}(t)\ddot{u}_{gy}(t+\tau)dt \qquad (2\text{-}3)$$

ここに τ は時間差を表すパラメターであり，(2-2)式および(2-3)式は，時間 τ だけ波形がずれた時に互いの波形がどの程度似ているかという相関を表す関数である。(2-2)式は，地動 X 方向の加速度成分間の自分自身の相関であるので自己相関関数と定義される。一方，(2-3)式は，地動 X 方向と地動 Y 方向の加速度成分間の相関を表し，相互相関関数と定義される。

時刻歴波形をフーリエ変換すれば，時刻歴波形が有する周波数特性を見出すことが可能である。$\ddot{u}_{gx}(t)$，$\ddot{u}_{gy}(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $\ddot{U}_{gx}(\omega)$，$\ddot{U}_{gy}(\omega)$ とすれば，地動 X 方向および Y 方向の Auto PSD 関数次式で定義される。

$$S_{xx}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{T}\left|\ddot{U}_{gx}(\omega)\right|^2 \qquad (2\text{-}4)$$

$$S_{yy}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{T}\left|\ddot{U}_{gy}(\omega)\right|^2 \qquad (2\text{-}5)$$

ここにTは，地震動の継続時間である。また，Cross PSD 関数は次式で定義される。

$$S_{xy}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{T}\ddot{U}_{gx}{}^{*}(\omega)\ddot{U}_{gy}(\omega) \tag{2-6}$$

ここに$U_{gx}{}^{*}(\omega)$は，$U_{gx}(\omega)$の複素共役を表す。従って，(2-6)式で表わされる Cross PSD 関数は，一般的に複素関数である。また, Cross PSD 関数の実部および虚部をそれぞれコスペクトル(Co-spectrum)およびクオドスペクトル(Quad-spectrum)と呼称される。Cross PSD 関数は複素数の関数であり，Cross PSD 関数を用いて，相関による現象を把握することは困難であるため，Auto PSD 関数$S_{xx}(\omega)$，$S_{yy}(\omega)$および Cross PSD 関数$S_{xy}(\omega)$を用いて，コヒーレンス関数(coherence) $\gamma_{xy}(\omega)$およびフェイズ(Phase) $\phi_{xy}(\omega)$がそれぞれ次式で定義される。

$$\gamma_{xy}(\omega)=\frac{\left|S_{xy}(\omega)\right|}{\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}} \tag{2-7}$$

$$\phi_{xy}(\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{Q_{xy}(\omega)}{C_{xy}(\omega)}\right) \tag{2-8}$$

ここに$C_{xy}(\omega)$および$Q_{xy}(\omega)$は，Cross PSD 関数のコスペクトル，クオドスペクトルを表す。フェイズ$\phi_{xy}(\omega)$は，時系列データをフーリエ変換して得られる$\ddot{U}_{gx}(\omega)$，$\ddot{U}_{gy}(\omega)$の位相角を意味し，フェイズをωで割ったものは 2 つの時系列データの時間遅れを表す。

(2-7)式に基づいて記録地震波の水平 2 方向成分間のコヒーレンスを評価することを試みようとする際に一つの問題が生じる。それは，前述のコヒーレンス関数の定義式により，(2-4)式および(2-5)式で表わされる Auto PSD 関数や(2-6)式で表わされる Cross PSD 関数を(2-7)式に代入すれば，コヒーレンス関数$\gamma_{xy}(\omega)$は全ての振動数において 1 となることである。従って，$S_{xx}(\omega)$，$S_{yy}(\omega)$および$S_{xy}(\omega)$を評価する際には，スペクトルの平滑化を行う必要があることが知られている。スペクトルの平滑化とは，対象とする周波数域周辺のスペクトル値を平均化することである。スペクトルの平滑化に関しては，様々な窓関数が提案されている。本節では，以下の二つの窓関数を用いてコヒーレンス関数を評価する。

<u>スペクトルの平滑化：(1) バートレット窓(＝三角形ウィンドー)</u>

バートレット窓とは，平滑化する際に対象とする周波数(=スペクトルウィンドーの中心点)でのスペクトル値を 1，窓関数の両端におけるスペクトル値を 0，その間のスペクトル値を線形に小さくするものである。バートレット窓を考慮した任意の周波数におけるスペクトル$\hat{S}_{xx}(\omega_k)$は次式により平滑化される。

$$\hat{S}_{xx}(\omega_k)=\frac{1}{m^2}\sum_{i=-m+1}^{m-1}\left(m-|i|\right)\hat{S}_{xx}\left(\frac{\omega_k-i}{T}\right) \tag{2-9}$$

ここにmは平滑化するためのデータ個数であり，mが大きいほどスペクトルが滑らかになる。なお，後述する記録地震波のコヒーレンス関数に関する分析を行う際には，$m=10$を用いた。

スペクトルの平滑化：パルザン窓

パルザン窓とはガウス窓の区分3次関数による近似を行ったもので，次式で与えられる。

$$\omega(n)=\begin{cases} 1.0-6\left(\dfrac{n}{N/2}\right)^2+6\left(\dfrac{|n|}{N/2}\right)^3 & \left(0\le|n|\le\dfrac{N}{4}\right) \\ 2\left(1-\dfrac{|n|}{N/2}\right)^3 & \left(\dfrac{N}{4}\le|n|\le\dfrac{N}{2}\right) \end{cases} \tag{2-10}$$

パルザン窓を用いた際の任意の周波数におけるスペクトル $\hat{S}_{xx}(\omega_k)$ は次式により平滑化される。

$$\hat{S}_{xx}(\omega_k)=\sum_{i=-m+1}^{m-1} w(i)\hat{S}_{xx}\left(\frac{\omega_k-i}{T}\right) \tag{2-11}$$

星谷は, Parzen フィルター(パルザン窓)を用いることにより好ましい結果が得られると指摘している。

図 2-8 はそれぞれの窓関数を図示したものである。また，図 2-9 はそれぞれの窓関数を用いた場合のコヒーレンス関数の違いを比較したものである。窓関数の違いによりコヒーレンス関数には若干の違いが見られるが，窓関数の差異によりコヒーレンス関数値に有意な差が生じるとは言い難い。従って，以降では，バートレット窓を用いた場合について結果を整理する。

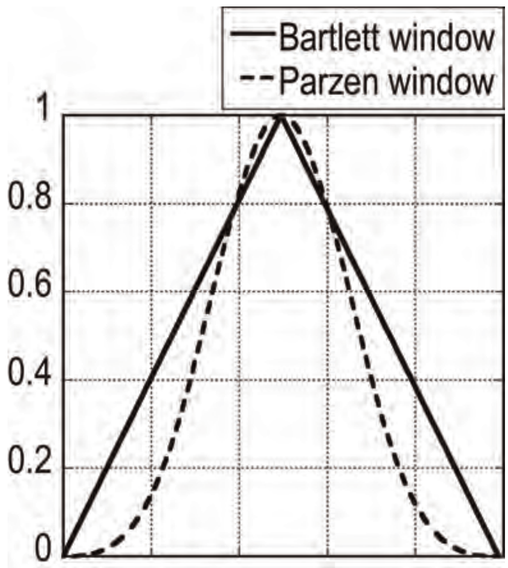


図 2-8 バートレット窓とパルザン窓の比較

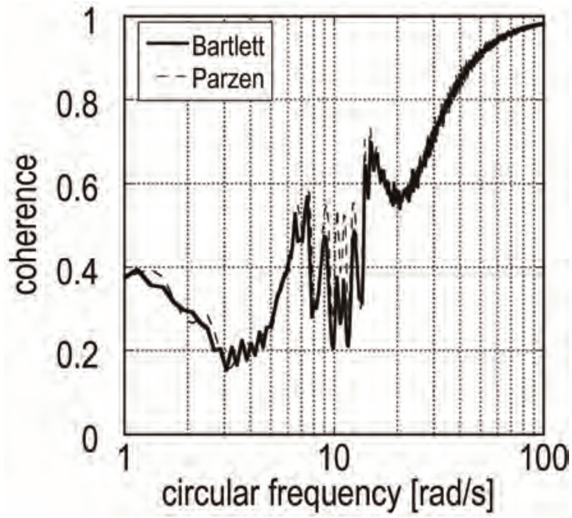


図 2-9 例題波におけるコヒーレンス比較

記録地震波の相関性に関する分析

本節では, (2-7)式のコヒーレンス関数の定義に基づき, 平滑化した Auto PSD 関数および Cross PSD 関数を用いて,観測された記録地震波における水平 2 方向成分間のコヒーレンス関数について分析する。対象とする地震動は，前述した相関係数に関する分析に用いた地震動群と同一のものとする。図 2-10~14 に前述した地震波のカテゴリーごとに分析結果を列挙する。ここで，コヒーレンス関数は振動数の関数であるが, 入力の卓越周波数領域周辺でのコヒーレンス関数の値が特に有意な意味を有するものと考えられる。従って，同図中には各方向の Auto PSD 関数 $S_{xx}(\omega)$，$S_{yy}(\omega)$ の最大振幅値で基準化した Normalized Spectrum $\bar{S}_{xx}(\omega)$ および $\bar{S}_{yy}(\omega)$ も図示した。しかしながら，それぞれの地震動のコヒーレンス関数を周波数ごとに図示しても, それぞれの入力が有する卓越振動数域でコヒーレンスの値を読み取るのは難しい。そこで, 図 2-10(b)~図 2-14(b)では, 各方向の基準化された Auto PSD 関数 $\bar{S}_{xx}(\omega)$ および $\bar{S}_{yy}(\omega)$ を縦軸にとり，振動数ごとの $\bar{S}_{xx}(\omega)$ および $\bar{S}_{yy}(\omega)$ とコヒーレンス値 $\gamma_{xy}(\omega)$ の対応をプロットした分布図を図示した。この分布図において，Spectrum ratio が大きく尚且つ，coherence が 1 に近い場合(分布図においては右上の領域)は，入力波の成分が卓越する振動数領域において 2 方向成分間の相関性が強いことを表している。

次頁から示す種々の記録地震波に対するコヒーレンス分析から次のことが言える。

1) Mexico SCT (図 2-10)のように各方向 Auto PSD 関数が卓越振動数が近接する場合では, Auto PSD 関数の卓越振動数域でコヒーレンス値が 0.9 程度あり，極めて強い相関性を示している。同じような傾向は， NR2(図 2-11)にも見られる。しかしながら，NS5，FS2 では，各方向の Auto PSD 関数が最も卓越する振動数域がほぼ一致しているにも関わらず当該振動数域におけるコヒーレンス値が 0.5 程度となっており，相関性が低い。従って，Auto PSD 関数の卓越振動数が近接する場合，すなわち各方向の地動成分の振動数特性が類似している場合でもコヒーレンス値にはばらつきがあり, 必ずしも相関が強いとは言えない。

2) 震源から観測点までの距離が長い Far field Records では，サイトの地盤構成(岩盤地盤，砂地盤)に関わらず，入力波が卓越する振動数領域でコヒーレンス値が 0.9 を上回るものはほとんど見られない。一方，Near field Rock records では，全体的に相関性が強い波が多く観測されている。これは震源からの伝播経路が短いことや, 岩盤地盤により地盤の非線形性の影響を受けにくいことなどの原因が考えられる。いずれにしても，水平 2 方向の地動成分間には，入力が卓越する振動数領域において強い相関性を有するものが多く観測されている。

【代表的な記録地震動】

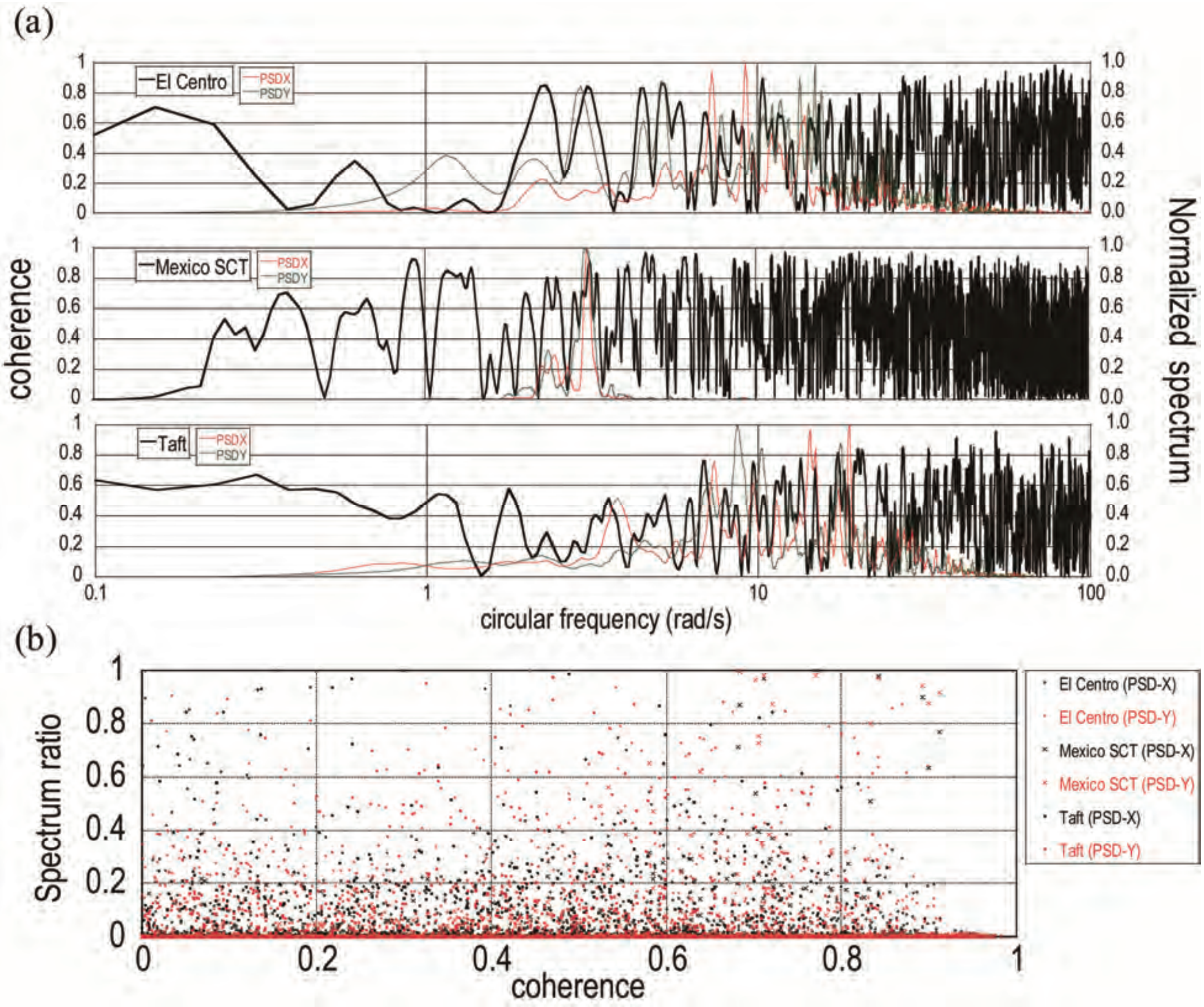


図 2-10 代表的な記録地震波におけるコヒーレンス分析

(a) 最大振幅値で基準化した各方向の Auto PSD 関数とコヒーレンス関数

(b) コヒーレンス分布

【Near field Rock Records】

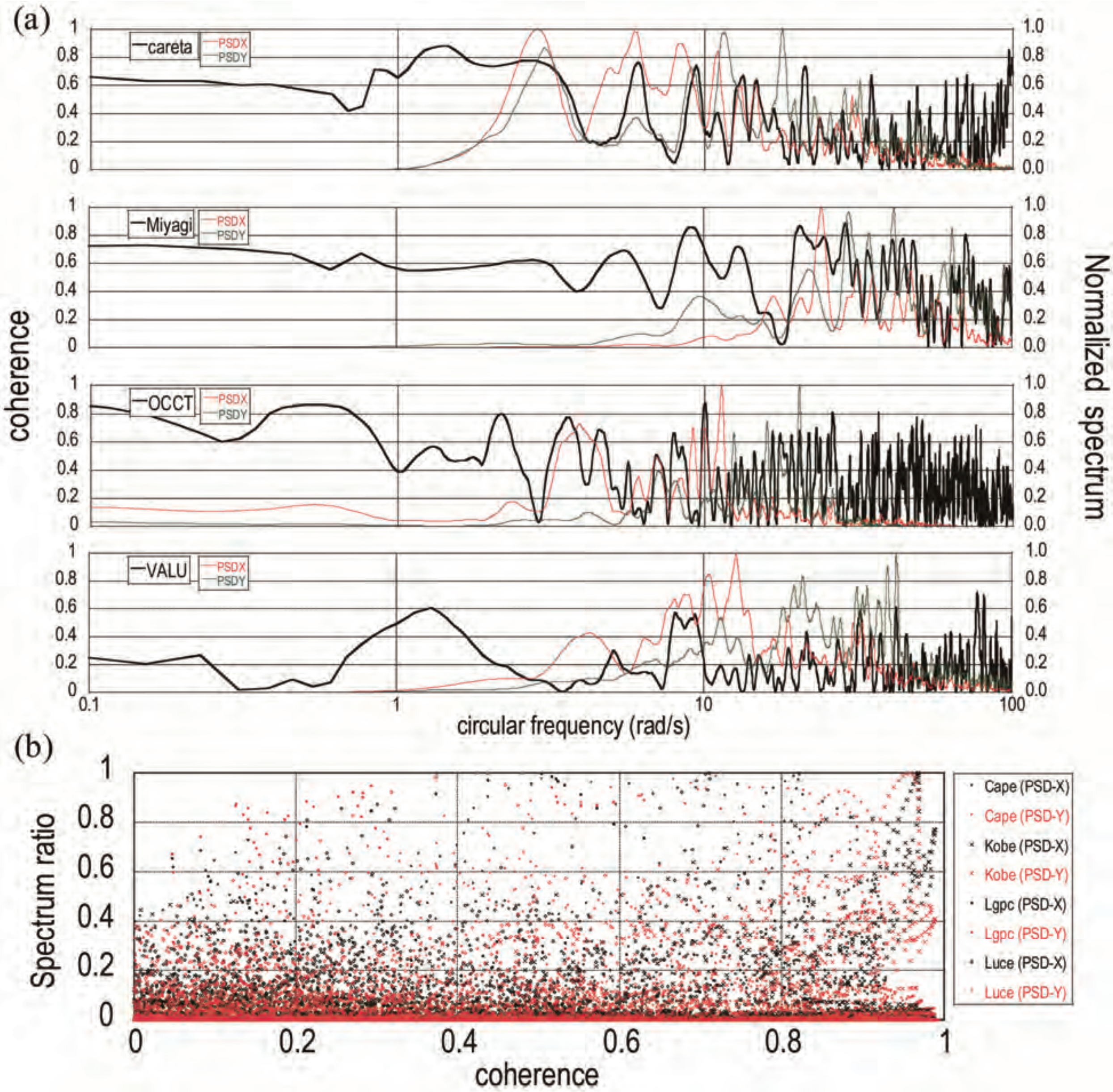


図 2-11　Near field rock record に対するコヒーレンス分析

(a) 最大振幅値で基準化した各方向の Auto PSD 関数とコヒーレンス関数

(b) コヒーレンス分布

【Near field Soil Records】

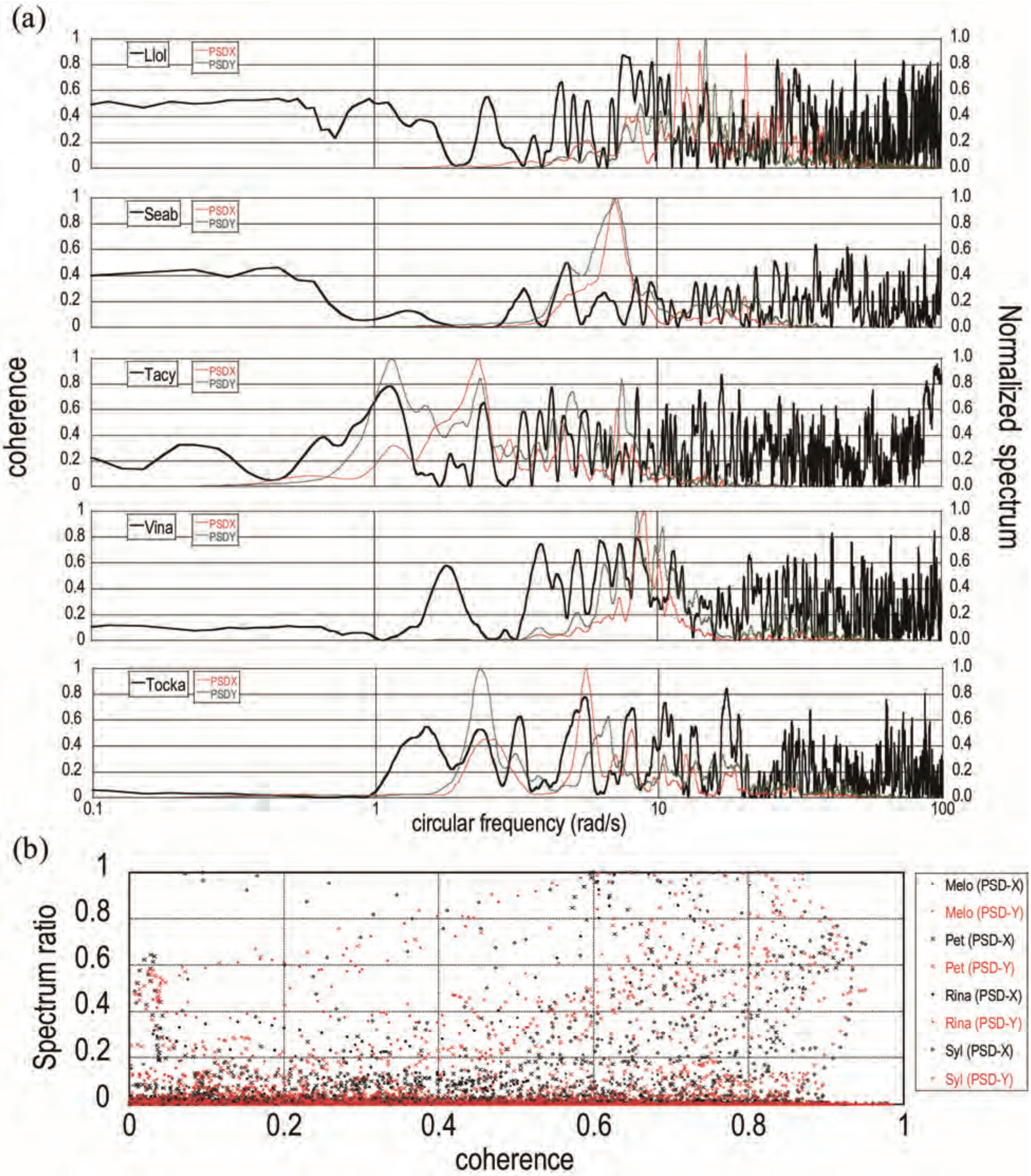


図 2-12 Near field soil record に対するコヒーレンス分析

(a) 最大振幅値で基準化した各方向の Auto PSD 関数とコヒーレンス関数

(b) コヒーレンス分布

【Far field Rock Record】

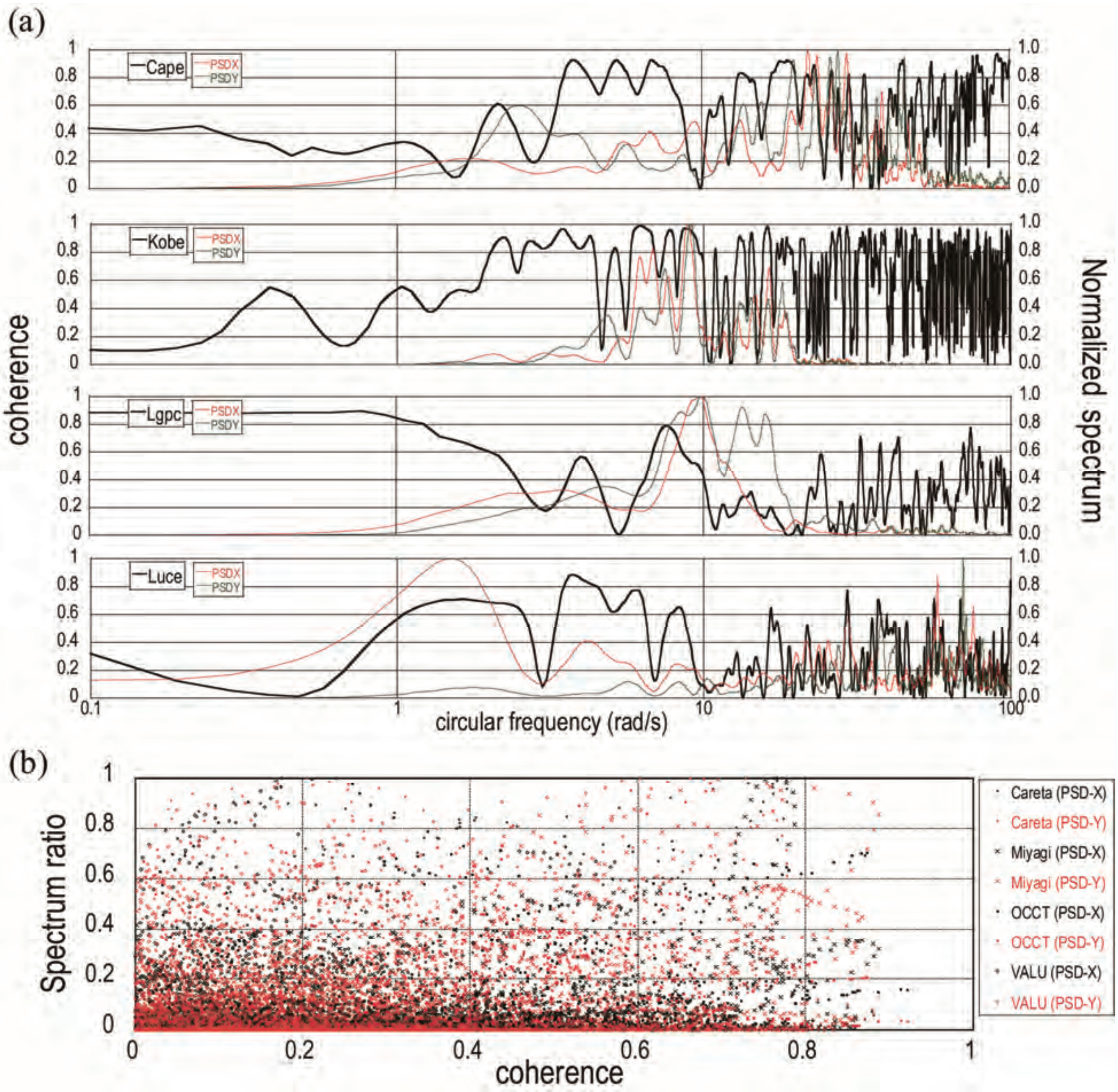


図 2-13 Far field soil record に対するコヒーレンス分析

(a) 最大振幅値で基準化した各方向の Auto PSD 関数とコヒーレンス関数

(b) コヒーレンス分布

【Far field Soil Record】

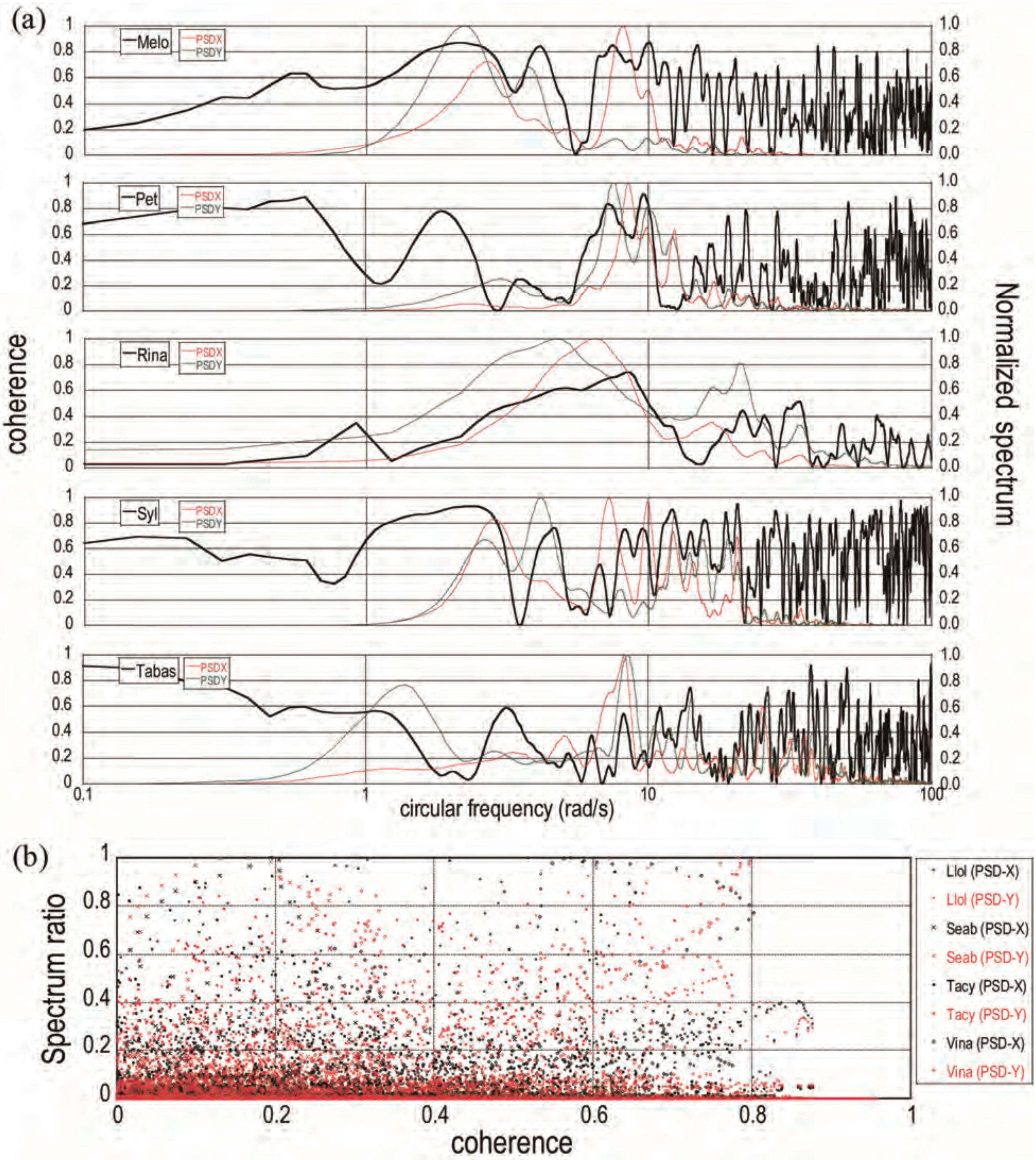


図 2-14 Far field soil record に対するコヒーレンス分析

(a) 最大振幅値で基準化した各方向の Auto PSD 関数とコヒーレンス関数

(b) コヒーレンス分布

本節では，記録地震波の水平 2 方向成分間の相関性について，相関係数およびコヒーレンス関数を指標として分析を行った。2 方向成分が全く同一の波形である場合は，相関係数，コヒーレンス関数は共に 1 となる。水平 2 方向の地動成分が全く同一となるようなものは著者の知る限りこれまでに観測されていない。しかしながら，耐震設計を行う上で 45°方向入力を扱う場合は，一つの波を各方向に分配して各方向の成分を抽出し，時刻歴応答解析により安全性を確認することもある。このような考え方の背景や詳細については，後述する地動主軸の導入部でも触れるが，各方向の地動成分は互いに線形従属の関係にあり，強い相関性を有しているといえる。

また, 多成分入力地震動における水平 2 方向地動成分間のコヒーレンス関数を評価することにより, 2 方向成分間の周波数特性における相関の度合いを見出すことが可能であることを明示した。コヒーレンス関数が 1 に近接するような強い相関性を有している地震波も多数観測されていることを明らかにした。従って，入力地震動の水平 2 方向成分間の相関性が構造物に及ぼす影響を明らかにすることには極めて意義があり, 本研究では構造物の応答が最大となるような最悪な多成分入力地震動の特性を見出す極限外乱問題を展開する。 次節からは，本極限外乱問題について定式化を行う。

2.3 非定常入力地震動モデル

1970 年に Drenick が極限外乱問題を提唱して以来，極限外乱を扱う様々な研究がなされてきた。極限外乱問題に共通する本質としては, 対象とした建物における任意の応答量を最大化する最悪な入力地震動の特性を見出すことにある。一般的に，地震動(入力加速度)の入力レベルを際限なく過大にすれば，得られる応答も当然ながら過大に評価されることは自明である。しかしながら，現実に起こりうる地震動の入力レベルには限界があると考えられ, 現実に起こりえない地震動を極限外乱問題の解として提示することは非現実的であり，本論の主旨にそぐわない。従って，極限外乱問題において将来起こりうる想定地震動の制約条件の設定方法を熟慮した上で, 入力地震動をいかにモデル化するかということは極めて重要である。

本研究では, 水平 2 方向同時入力地震動における入力地動成分間の相関関係が建築構造物に及ぼす影響を極限外乱理論の立場から明らかにし，対象とする建物に対して最悪な入力外乱特性を導く。前節で記録地震波の水平 2 方向成分の相関性について分析した際に用いた種々の記録地震波の時刻歴加速度波形を見てみると, 各方向の地動加速度成分における最大振幅値を取る時刻が各方向で相対的に異なっており，時間差が生じる場合も見られることがある。極限外乱理論を展開する上では，このような様々なタイプの地震動や地動外乱の特性を包括的に扱えた外乱モデルを用いることが望ましい。また理論の展開にはよりシンプルな外乱モデルであるほうが特性の把握には都合がよい。これらの点に留意した上で，本論文で扱う入力地震動のモデルを次のように定める。

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{gx}(t) &= c_x(t) w_x(t) \\ \ddot{u}_{gy}(t) &= c_y(t) w_y(t) \end{aligned} \qquad \text{(2-12a,b)}$$

(2-12)式において右下添え字は水平成分の方向を表すものとする。以下同じ。

ここに　$c_x(t)$ および $c_y(t)$ ：経時特性を表す無次元の確定関数（包絡曲線=envelope 関数）

$w_x(t)$ および $w_y(t)$ ：0 平均の定常ガウス過程に従う(正規分布) $w(t)$ は確率変数

ここでは, 振幅調整を行う関数 $c_x(t)$ および $c_y(t)$ を Jennings 型に従う確定関数として取り扱う。$c_x(t)$

および$c_y(t)$は最大振幅が 1 となるように正規化したものとする。包絡関数における開始時刻位置の操作を行う，外乱の継続時間を変更する等により，2 方向地動成分の時間差入力も考慮することが可能である。

また$w_x(t)$ および$w_y(t)$は，各方向の地動入力における Auto PSD 関数からランダム振動論における確率論的手法によりシミュレートすることができる。しかしながら，$w_x(t)$ および$w_y(t)$の位相特性は，ランダムに定まるものであり不確定さが存在する。このようなランダムな位相関係を有する$w_x(t)$および$w_y(t)$の中で，対象とする応答量を最大化するような極限外乱，すなわち最悪な位相関係を有する多成分入力地震動を決定することが本研究の目的である。従って，本極限外乱問題においては，(2-12)式における$w_x(t)$ および$w_y(t)$を未知関数として扱う。

前述のように包絡関数は，最大振幅が 1 となるように正規化した無次元関数として扱うため，地震動レベルを決定づけるものは，$w_x(t)$ および$w_y(t)$である。従って，それぞれの地震動が有する Auto PSD 関数のレベルを適切に設けることで入力地震動の入力レベルを定めることが可能である。ここで, 非減衰速度応答スペクトルと地震動のフーリエ振幅スペクトルが近似的に等価なものとして扱うことができるという既知の事実に基づいて，本章で定める地震動の Auto PSD 関数は，安全限界の告知スペクトルを用いてそれぞれ次式で定義する。

$$S_{xx}(\omega)=\frac{\left|S_{v,h=0}^{(x)}\right|^2}{2\pi T\left|c_y(t)\right|^2_{\max}} \tag{2-13}$$

$$S_{yy}(\omega)=\frac{\left|S_{v,h=0}^{(y)}\right|^2}{2\pi T\left|c_y(t)\right|^2_{\max}} \tag{2-14}$$

ここに$S_{v,h=0}^{(x)}$および$S_{v,h=0}^{(y)}$，$\left|c_x(t)\right|_{\max}$および$\left|c_y(t)\right|_{\max}$，$T$は，それぞれ水平各方向の地動入力に対する非減衰速度応答スペクトル，水平各方向の包絡関数の最大値，地震動の継続時間を表す。

2.4　水平 2 方向同時入力地震動に対する極限外乱問題

2.4.1 水平 2 方向同時入力地震動を受ける立体骨組のモデル化

本節では，極限外乱理論を展開する上で，対象とする構造物のモデル化を行う。まずは，水平 2 方向同時入力を受ける構造物として最も単純なものとして無偏心の 1 層 1 スパン立体骨組モデルを考える(図 2-15)。動的モデルを考える上では，建物軸X_1, X_2各方向を荷重変位関係が等価となるような 1 自由度モデルに置換する。これは，図 2-15 に示す立体骨組が X_1, X_2各方向に異なるスパン長を有する平面骨組(図 2-16)から構成されることを意味する。

伸び無し変形を仮定した場合の柱部材の水平方向剛性k_uは，柱頭の水平方向変位uおよび水平力P_uを用いて次式で表現される。

$$k_u=P_u/u=P_u/(H\cdot R_{AB}) \tag{2-15}$$

R_{AB}は柱の部材角を表す。たわみ角法を用いれば，BD 部材の B 端での曲げモーメントM_{BD}^{u}は次式となる。

$$M_{BD}^{u}=(6EI_b/L)\theta_B \tag{2-16}$$

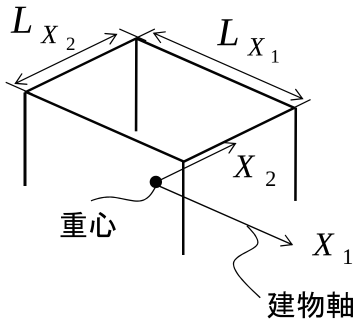


図 2-15 無偏心立体骨組モデル

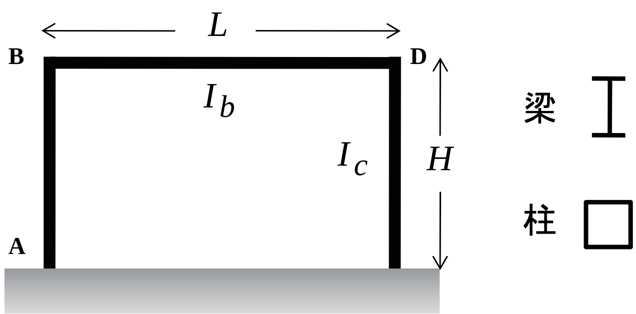


図 2-16 1 層 1 スパン平面骨組

節点 B でのモーメントの釣り合いを考慮することにより，節点 B の節点回転角 θ_B と部材角 R_{AB} の関係は，次式となる。

$$\theta_B = \frac{3}{2+3(I_b/I_c)\cdot(H/L)} R_{AB} \tag{2-17}$$

層方程式と(2-86)式から θ_B を消去すれば，部材角 R_{AB} は次式となる。

$$R_{AB} = \frac{P_u H^2\{2+3(I_b/I_c)\cdot(H/L)\}}{12EI_c\{1+6(I_b/I_c)\cdot(H/L)\}} \tag{2-18}$$

このとき，各方向の水平方向剛性 k_{ui} は，(2-15)式より次式で表わされる。

$$k_{ui} = \frac{12EI_c\{1+6(I_{bi}/I_c)\cdot(H/L_i)\}}{H^3\{2+3(I_{bi}/I_c)\cdot(H/L_i)\}} \quad (i=1,2) \tag{2-19}$$

2.4.2　水平 2 方向同時入力を受ける柱頭縁応力の評価

水平 2 方向同時入力地震動の影響を受ける応答として，部材応力が挙げられる。例えば 2 軸応力状態を考慮した柱頭部の応力分布では, 各方向の入力に対する柱頭部応力分布を重ね合わせることが一般的である。図 2-17 は，2 軸曲げを受ける柱頭部の応力分布の概念図であり，X 方向および Y 方向の水平変形に伴い生じる曲げモーメントに起因する応力分布がそれぞれ重ね合わせて表現されている。1 層 1 スパン立体骨組に限れば，建物軸各方向の柱頭曲げモーメントは梁端部曲げモーメントに等しい。従って，建物主軸方向に沿った 1 方向入力に対する柱頭縁応力は，柱頭曲げモーメント（＝梁端部曲げモーメント)を柱の断面係数 Z_c で割ることにより次式のように求められる。

$$\sigma_{BAi}(t) = A_{\sigma i} u_i(t) \quad (i=1,2) \tag{2-20}$$

ここに

$$A_{\sigma i} \equiv 18EI_b \Big/ \left[HL_i Z_c \left\{2+3(I_b/I_c)\cdot(H/L_i)\right\}\right] \quad (i=1,2) \tag{2-21}$$

本研究では，非定常地震動モデルを構築する上で， $w_{u1}(t)$ および $w_{u2}(t)$ を未知数とし，それらの Auto PSD 関数を既知なものとして与える問題を扱う。従って，振動数領域における入力のスペクトルと構造物の応答を関連づけるためには, 構造物の応答として 2 乗平均応答を扱うことが有意である。

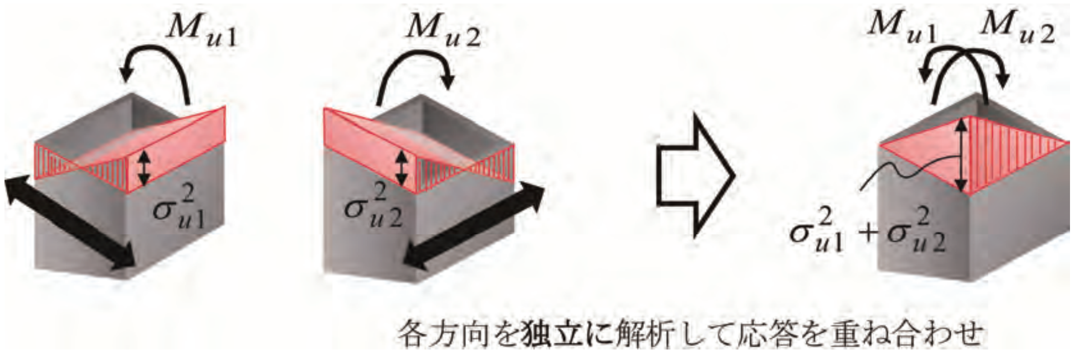


図 2-17 2 軸曲げを受ける柱頭縁応力

本研究で主として扱う応答量を 2 乗平均応答値とする理由は，以下に示される。

任意の時刻歴関数 $f(t)$ の 2 乗平均は次式で表わすことができる。

$$E\left[f(t)f(t)\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt \tag{2-22}$$

ここに $E[\quad]$ は，アンサンブル平均を表す。一方，前節で示した自己相関関数 $\varphi_{xx}(\tau)$ の定義式において $\tau=0$ とすれば，次式を得る。

$$\varphi(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt \tag{2-23}$$

(2-22)式と(2-23)式とは等価な式になっている。従って，任意の時刻歴関数 $f(t)$ (例えばここでは，水平 2 方向同時入力を受ける柱頭縁応力)の 2 乗平均は，当該の時刻歴関数 $f(t)$ の自己相関関数において $\tau=0$ としたものに等しい。

さらに 2 乗平均応答の平方根をとったものを 2 乗平均平方根（＝RMS)といい，任意の時刻歴関数 $x(t)$ の RMS は， $x(t)$ の相加平均 $\bar{x}$ および標準偏差 σ_x を用いて次式で定義される。

$$x_{RMS}^2=\bar{x}^2+\sigma_x^2 \tag{2-24}$$

従って，(2-24)式において平均値が 0 であれば，2 乗平均平方根(RMS)と標準偏差は一致する。弾性応答を想定する場合では，地震時応答の相加平均 $\bar{x}$ を 0 とみなしても差し支えないので，ここでは構造物の時刻歴応答の RMS と標準偏差を等価なものとして扱うこととする。

振動特性の統計量である RMS 応答は長期的に定常な振動を励起するような風外乱を対象とする構造設計における設計指標として用いられることがある。一方，地震動入力を受ける建築構造物の耐震設計を行う上で，設計者が主として着目すべき応答量は，RMS 応答ではなく最大応答値であることが多いと考えられる。構造物の応答の最大値を評価する上では，標準偏差と最大値には統計的に一定の比率となっていることが知られており，ここでは，標準偏差(≈RMS)に一定の比率(ピークファクター)を乗じることにより最大値を推定する。これにより RMS 応答を標準偏差とみなすことが出来る場合には，2 乗平均応答(=RMS 値の 2 乗)と最大応答値の関連づけが可能である。

水平 2 方向同時入力を受ける柱頭縁応力 $\sigma_c(t)$ は，(2-20)式で示した各方向の入力に対する柱頭縁応力の線形和で表わされるとすれば， $\sigma_c(t)$ は次式で定義される。

$$\sigma_c(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t) \tag{2-25}$$

ここに，$\sigma_1(t)$ および $\sigma_2(t)$ は，建物の各軸方向入力に対する柱頭部縁応力であり，(2-20)式において部材接点位置を表す BA を省略したものである。(2-25)式を(2-22)式に代入すれば，水平 2 方向同時入力地震動に対する柱頭縁応力の 2 乗平均応答は次のように展開される。

$$\begin{aligned} R_{\sigma c}(t_1,t_2) &= E\left[\sigma_c(t_1)\sigma_c(t_2)\right] \\ &= E\left[\left\{\sigma_1(t_1)+\sigma_2(t_1)\right\}\left\{\sigma_1(t_2)+\sigma_2(t_2)\right\}\right] \\ &= E\left[\sigma_1(t_1)\sigma_1(t_2)+\sigma_1(t_1)\sigma_2(t_2)+\sigma_2(t_2)\sigma_1(t_1)+\sigma_2(t_1)\sigma_2(t_2)\right] \end{aligned} \tag{2-26}$$

(2-26)式より，2 乗平均応答を展開することにより，4 つの項が得られることが分かる。以後の節ではそれぞれの項について詳細に定式化を行っていくが，(2-26)式を構成する要素は大きく 2 つに分類される。まず，第 1 項および第 4 項は，1 方向入力に対する柱頭縁応力の 2 乗平均応答の項である。言いかえれば自己相関に関する項である。一方で，第 2 項および第 3 項に関しては，各方向の柱頭縁応力の積の項としてあらわれるため，これは水平 2 方向の相互相関に関する項であり，以後ではこれを相関項と称することとする。

自己相関に関する項の定式化

ここでは，(2-26)式における第 1 項ならびに第 4 項である自己相関に関する項を展開する。各方向の柱頭縁応力 $\sigma_1(t)$ および $\sigma_2(t)$ は，各方向の水平変位 $u_1(t)$ および $u_2(t)$ に部材パラメターから求められる定数をそれぞれ乗じることにより評価が可能である。1 自由度系モデルが地動入力を受けた時の水平変位は，Duhamel 積分の形で表わすことができる。例えば，水平地動 $\ddot{u}_{g1}(t)$ を受けた時の水平方向応答 $u_1(t)$ は次式で表わされる。

$$u_1(t) = \int_0^t \left\{-\ddot{u}_g(\tau)\right\} g_{U1}(t-\tau)\,d\tau \tag{2-27}$$

ここに $g_{U1}(t-\tau)$ は単位衝撃応答関数であり，次式で定義される。

$$g_{U1}(t) = \frac{1}{\omega_{u1}'} e^{-h_{u1}\omega_{u1}t} \sin \omega_{u1}' t \tag{2-28}$$

ここに，$\omega_{u1}' = \omega_{u1}\sqrt{1-h_{u1}^2}$。

非定常地震動モデル(2-12)式および 1 自由度系水平方向応答(2-27)式を柱頭縁応力 $\sigma_1(t)$ に代入し，1 方向入力に対する柱頭縁応力の 2 乗平均である自己相関に関する項 $E\left[\sigma_1(t_1)\sigma_1(t_2)\right]$ を展開すれば次式を得る。ただし，アンサンブル平均は，確率変数以外の定数等は扱わないことに留意する。

$$E\left[\sigma_1(t_1)\sigma_1(t_2)\right] = \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} c_x(\tau_1)c_x(\tau_2)\,g_{U1}(t_1-\tau_1)g_{U1}(t_2-\tau_2)E\left[w_x(t_1)w_x(t_2)\right]d\tau_1 d\tau_2 \tag{2-29}$$

ここで，$t_2 = t_1 + \tau$ とすれば，$E\left[w_x(t_1)w_x(t_2)\right]$ は，$w_{u1}(t_1)$ に関する自己相関関数となっている。前節で示したように，Wiener-Khintchine の公式より自己相関関数は，Auto PSD 関数の逆フーリエ変換で

与えられるので，(2-29)式における $E\left[w_x\left(t_1\right)w_x\left(t_2\right)\right]$ は，次式となる。

$$E\left[w_x(t_1)w_x(t_2)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega(\tau_1-\tau_2)}d\omega \qquad \text{(2-30)}$$

これを(2-29)式に代入する。さらにオイラーの公式を用いて，(2-29)式を展開すれば，次式となる。

$$\begin{aligned}E\left[\sigma_1(t_1)\sigma_1(t_2)\right]&=A_{\sigma1}{}^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\left\{c_x(\tau_1)g_{U1}(t_1-\tau_1)c_x(\tau_2)g_{U1}(t_2-\tau_2)\right\}S_{xx}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega(\tau_1-\tau_2)}d\tau_1 d\tau_2 d\omega\\&=A_{\sigma1}{}^2\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{aligned}&\int_0^{t_1}c_x(\tau_1)g_{U1}(t_1-\tau_1)(\cos\omega\tau_1+\mathrm{i}\sin\omega\tau_1)d\tau_1\cdot\\&\qquad\int_0^{t_2}c_x(\tau_2)g_{U1}(t_2-\tau_2)(\cos\omega\tau_2-\mathrm{i}\sin\omega\tau_2)d\tau_2\end{aligned}\right\}S_{xx}(\omega)d\omega\end{aligned}$$

(2-31)

2 乗平均応答は， $\tau=0$ における自己相関関数である。従って，(2-31)式において $t_1=t_2$ として展開すれば，次式となる。

$$\begin{aligned}E\left[\sigma_1(t)^2\right]&=A_{\sigma1}{}^2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left\{\int_0^t c_x(\tau)g_{U1}(t-\tau)\cos\omega\tau\cdot d\tau\right\}^2+\left\{\int_0^t c_x(\tau)g_{U1}(t-\tau)\sin\omega\tau\cdot d\tau\right\}^2\right]S_{xx}(\omega)d\omega\\&=A_{\sigma1}{}^2\int_{-\infty}^{\infty}\left[C_{c1}(t;\omega)^2+C_{s1}(t;\omega)^2\right]S_{xx}(\omega)d\omega\end{aligned}$$

(2-32)

ここに

$$C_{c1}(t;\omega)\equiv\int_0^t\left\{-c_x(\tau)\cos\omega\tau\right\}g_{U1}(t-\tau)d\tau \qquad \text{(2-33)}$$

$$C_{s1}(t;\omega)\equiv\int_0^t\left\{-c_x(\tau)\sin\omega\tau\right\}g_{U1}(t-\tau)d\tau \qquad \text{(2-34)}$$

同様に $E[\sigma_2(t)^2]$ は，次のように表わされる。

$$E\left[\sigma_2(t)^2\right]=A_{\sigma2}{}^2\int_{-\infty}^{\infty}\left[C_{c2}(t;\omega)^2+C_{s2}(t;\omega)^2\right]S_{yy}(\omega)d\omega \qquad \text{(2-35)}$$

ここに $C_{c2}(t;\omega)$ および $C_{s2}(t;\omega)$ は，建物軸 Y 方向に入力される地動入力の包絡関数 $c_{u2}(t)$ および単位衝撃応答関数 $g_{U2}(t-\tau)$ を用いて次式で定義される。

$$C_{c2}(t;\omega)\equiv\int_0^t\left\{-c_y(\tau)\cos\omega\tau\right\}g_{U2}(t-\tau)d\tau \qquad \text{(2-36)}$$

$$C_{s2}(t;\omega)\equiv\int_0^t\left\{-c_y(\tau)\sin\omega\tau\right\}g_{U2}(t-\tau)d\tau \qquad \text{(2-37)}$$

相互相関に関する項の定式化

次に水平 2 方向同時入力に対する柱頭縁応力の建物軸各方向成分間の相互相関に関する項について定式化を行う。(2-26)式における第 2 項の相関項に(2-12)式で表わされる各方向の地動外乱モデルおよび(2-27)式の形式で表わされる各方向の水平方向応答を代入すれば次式となる。ここでもアンサンブル平均に関わるものが確率変数である $w_x(\tau_1)$ および $w_y(\tau_2)$ のみである点に留意する。

$$E\left[\sigma_1(t_1)\sigma_2(t_2)\right]=A_{\sigma1}A_{\sigma2}E\left[\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\left[\{c_x(\tau_1)w_x(\tau_1)\}g_{U1}(t_1-\tau_1)\{c_y(\tau_2)w_y(\tau_2)\}g_{U2}(t_2-\tau_2)\right]d\tau_2 d\tau_1\right]$$
$$=A_{\sigma1}A_{\sigma2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\left\{c_x(\tau_1)g_{U1}(t_1-\tau_1)c_y(\tau_1)g_{U2}(t_1-\tau_1)\right\}E\left[w_x(\tau_1)w_y(\tau_2)\right]d\tau_2 d\tau_1$$

(2-38)

ここで，$E\left[w_x(\tau_1)w_y(\tau_2)\right]$は，$w_x(\tau_1)$および$w_y(\tau_1)$に関する相互相関関数になっている。そこで，相互相関関数(時間領域)と Cross PSD 関数(振動数領域)が互いにフーリエ変換の対になっているという Wiener-Khintchine の公式を用いて，$E\left[w_x(\tau_1)w_y(\tau_2)\right]$は$w_x(\tau_1)$および$w_y(\tau_2)$に関する Cross PSD 関数$S_{xy}$を用いて次式で与えられる。

$$E\left[w_x(\tau_1)w_y(\tau_2)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xy}(\omega)e^{\mathrm{i}\,\omega(\tau_1-\tau_2)}d\omega \tag{2-39}$$

Cross PSD 関数$S_{xy}(\omega)$は，一般に複素数であり，その実部および虚部はそれぞれコスペクトル(＝co-spectrum) $C_{xy}(\omega)$およびクオドスペクトル(＝quad-spectrum) $Q_{xy}(\omega)$と定義される。すなわち，Cross PSD 関数$S_{12}(\omega)$は，次のように表わされる。

$$S_{xy}(\omega)=C_{xy}(\omega)-\mathrm{i}Q_{xy}(\omega) \tag{2-40}$$

(2-40)式を(2-39)式に代入すれば，次式を得る。

$$E\left[\sigma_1(t_1)\sigma_2(t_2)\right]=A_{\sigma1}A_{\sigma2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\left\{c_x(\tau_1)g_{U1}(t_1-\tau_1)\cdot c_y(\tau_2)g_{U2}(t_2-\tau_2)\right\}S_{xy}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega(\tau_1-\tau_2)}d\tau_2 d\tau_1 d\omega$$
$$=A_{\sigma1}A_{\sigma2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{t_1}c_x(\tau_1)g_{U2}(t_1-\tau_1)e^{\mathrm{i}\omega\tau_1}d\tau_1\cdot\int_0^{t_2}c_y(\tau_2)g_{U2}(t_2-\tau_2)e^{-\mathrm{i}\omega\tau_2}d\tau_2\right\}S_{xy}(\omega)d\omega$$

(2-41)

さらにオイラーの公式を適用し，$t_1=t_2$として展開すれば，(2-41)式は次式となる。

$$E\left[\sigma_1(t_1)\sigma_2(t_2)\right]=A_{\sigma1}A_{\sigma2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\int_0^t c_x(\tau)g_{U1}(t-\tau)(\cos\omega\tau+\mathrm{i}\sin\omega\tau)d\tau\\ \qquad\times\int_0^t c_y(\tau)g_{U2}(t-\tau)(\cos\omega\tau-\mathrm{i}\sin\omega\tau)d\tau\end{array}\right\}S_{xy}(\omega)d\omega$$

(2-42)

(2-42)式の被積分項を展開するうえで，(2-33)式，(2-34)式および(2-36)式，(2-37)式を用いれば，これらを(2-42)式に代入することにより次式を得る。

$$E\left[\sigma_1(t_1)\sigma_2(t_2)\right]=A_{\sigma1}A_{\sigma2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}C_{c1}(t;\omega)C_{c2}(t;\omega)+C_{s1}(t;\omega)C_{s2}(t;\omega)\\ +\mathrm{i}\left\{C_{c1}(t;\omega)C_{s2}(t;\omega)-C_{s1}(t;\omega)C_{c2}(t;\omega)\right\}\end{array}\right\}S_{xy}(\omega)d\omega \tag{2-43}$$

同様に，(2-26)式における第 3 項の相関項も展開すれば，次式を得る。

$$E\left[\sigma_2(t_1)\sigma_1(t_2)\right]=A_{\sigma1}A_{\sigma2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}C_{c1}(t;\omega)C_{c2}(t;\omega)+C_{s1}(t;\omega)C_{s2}(t;\omega)\\ -\mathrm{i}\left\{C_{c1}(t;\omega)C_{s2}(t;\omega)-C_{s1}(t;\omega)C_{c2}(t;\omega)\right\}\end{array}\right\}S_{xy}(\omega)d\omega \tag{2-44}$$

ここでCross PSD関数の一般的な性質より，$S_{12}(\omega)$および$S_{21}(\omega)$は互いに複素共役の関係にある。従って，(2-43)式および(2-44)式の被積分項をそれぞれ比較すれば，被積分項は互いに複素共役となっていることが分かる。以上のことから，相互相関に関する項である(2-26)式の第2項および第3項の和は，(2-43)式の実部の2倍となり，次のように表わされる。

$$E\left[\sigma_2(t_1)\sigma_1(t_2)\right]+E\left[\sigma_1(t_1)\sigma_2(t_2)\right]=2A_{\sigma1}A_{\sigma2}\int_{-\infty}^{\infty} f_a(t;\omega)C_{xy}(\omega)+f_b(t;\omega)Q_{xy}(\omega)d\omega \quad (2\text{-}45)$$

ここに

$$f_a(t;\omega)=C_{c1}(t;\omega)C_{c2}(t;\omega)+C_{s1}(t;\omega)C_{s2}(t;\omega) \quad (2\text{-}46)$$

$$f_b(t;\omega)=C_{c1}(t;\omega)C_{s2}(t;\omega)-C_{s1}(t;\omega)C_{c2}(t;\omega) \quad (2\text{-}47)$$

以上より，水平 2 方向同時入力地震動を受ける立体骨組の柱頭縁応力の 2 乗平均応答は，(2-32)式, (2-35)式および(2-45)式の和で表され，次式となる。

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(\sigma_1(t)+\sigma_2(t)\right)^2\right]\\
&=A_{\sigma1}{}^2\int_{-\infty}^{\infty}\left\{C_{c1}(t;\omega)^2+C_{s1}(t;\omega)^2\right\}S_{xx}(\omega)d\omega\\
&\quad+2A_{\sigma1}A_{\sigma2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f_a(t;\omega)C_{xy}(\omega)+f_b(t;\omega)Q_{xy}(\omega)\right\}d\omega\\
&\quad+A_{\sigma2}{}^2\int_{-\infty}^{\infty}\left\{C_{c2}(t;\omega)^2+C_{s2}(t;\omega)^2\right\}S_{yy}(\omega)d\omega
\end{aligned} \quad (2\text{-}48)$$

(2-48)式により本極限外乱理論において対象とする応答量である2軸応力状態の柱頭縁応力の2乗平均応答を多次元入力地震動におけるAuto PSD関数およびCross PSD関数を用いて定式化された。構造物モデルの種々のパラメターおよび各方向の地動成分のAuto PSD関数を既知なものとして与えることが出来れば，(2-48)式における自己相関に関する項，すなわち(2-48)式における第1項および第3項は，それぞれ評価することが可能である。しかしながら，Auto PSD関数は，地動成分のフーリエ変換$\ddot{U}_{gx}(\omega)$の絶対値の2乗に相当するものであり，フーリエ変換の実部虚部それぞれが与えられるわけではない。従って，(2-6)式におけるCross PSD関数の定義式からも明らかなように，水平2方向の相互相関に関する項における2方向地動成分間のCross PSD関数のコスペクトルおよびクオドスペクトルは未知である。以上のことから本極限外乱問題では, 対象とする応答量を最大化するCross PSD関数を見出す問題に帰着する。

2.4.3 地動主軸の存在を仮定したPenzien-Watabeモデルに基づく入力地震動モデル

前節までは，建物軸における各方向に入力される地動成分のAuto PSD関数がそれぞれ与えられるという仮定の下で各方向の応答を評価した。しかしながら，水平2方向同時入力問題を扱う上で，震源位置と対象とする建物の相互関係により, 断層破壊面から伝播する地震波の主成分が建物に入力される際の入射角は未知である。そこで，建物水平 2 方向入力を考慮した既往の研究として，Smeby および Der kiureghian(1985)は，1方向入力に対する応答のモード間の相関関係を考慮可能な応答評価法であるCQC(Complete Quadratic Combination)法を3次元入力地震動に対する応答評価法に拡張を行ったCQC3法を提案している。CQC3法では，Penzien-Watabeモデルに基づく地動主軸の存在を仮定

している。地動主軸と建物軸の関係を図 2-18 に示す。ここでは水平面内のみを考慮する。

Penzien, Watabe が提唱した地動主軸では, 地震の震央から構造物の重心に向かう軸を地動主軸 Z_1 といい，地動主軸に直行する方向を地動弱軸 Z_2 といい，地動主軸および地動弱軸方向の地動成分間は無相関である。

建物軸方向に入力される地動成分は, 地動主軸および弱軸方向の入力成分を建物各軸方向に分配することによって得られる。建物軸方向と地動主軸方向がなす角を θ と置けば，建物軸方向に入力される地動成分(加速度) $\ddot{u}_{g1}$ および $\ddot{u}_{g2}$ は，次の座標変換マトリクスにより求められる。

$$\begin{Bmatrix}\ddot{u}_{g1}\\ \ddot{u}_{g2}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_{z1}\\ \ddot{u}_{z2}\end{Bmatrix} \tag{2-49}$$

また，建物軸方向に入力される地動成分の Auto PSD 関数は，地動主軸および弱軸方向の Auto PSD 関数より次式で求められる。

$$\mathbf{S}_{\ddot{X}\ddot{X}}(\omega)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\mathbf{S}_{\ddot{Z}\ddot{Z}}(\omega)\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{2-50}$$

ここで

$$\mathbf{S}_{\ddot{X}\ddot{X}}(\omega)=\begin{bmatrix}S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega)\\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega)\end{bmatrix},\quad \mathbf{S}_{\ddot{Z}\ddot{Z}}(\omega)=\begin{bmatrix}S_{\ddot{Z}_1\ddot{Z}_1}(\omega) & 0\\ 0 & S_{\ddot{Z}_2\ddot{Z}_2}(\omega)\end{bmatrix} \tag{2-51a,b}$$

建物軸方向の地動成分間の相関の度合を表すコヒーレンス関数は，次式で定義される。

$$\rho_{12}=\frac{E\left[\ddot{u}_{g1}\ddot{u}_{g2}\right]}{\sqrt{E\left[\ddot{u}_{g1}^2\right]E\left[\ddot{u}_{g2}^2\right]}} \tag{2-52}$$

(2-49)式を(2-50)式に代入すれば，コヒーレンス関数は次のように表わされる。

$$\gamma_{xy}\left(\gamma_{\mathrm{org}},\theta\right)=\frac{\left(1-\gamma_{\mathrm{org}}\right)\sin 2\theta}{\sqrt{\left(1+\gamma_{\mathrm{org}}\right)^2-\left(1-\gamma_{\mathrm{org}}\right)^2\cos^2 2\theta}} \tag{2-53}$$

ここに，γ_{org} は，地動主軸および弱軸方向の Auto PSD 関数の比 $S_{\ddot{Z}_2\ddot{Z}_2}(\omega)/S_{\ddot{Z}_1\ddot{Z}_1}(\omega)$ を表す。

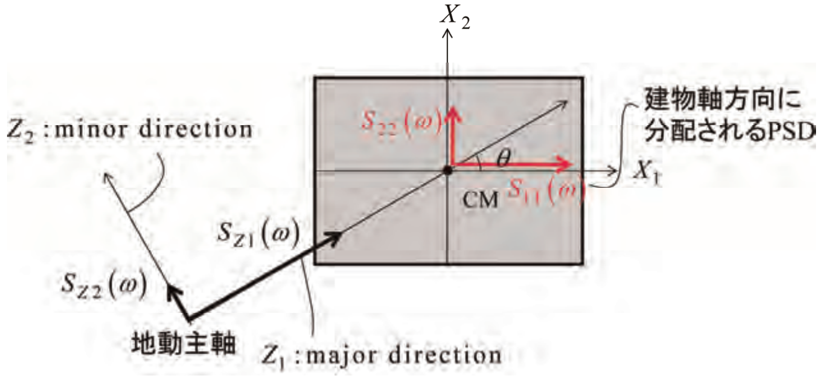


図 2-18 地動主軸と建物軸の関係

2.4.4　拡張 Penzien-Watabe モデル

(2-7)式に従えば，コヒーレンス関数γ_{xy}は各方向の Auto PSD 関数の相乗平均と Cross PSD 関数の絶対値の比で定義される。従って，Cross PSD 関数(未知量)の絶対値は，Auto PSD 関数(既知量) とコヒーレンス関数の値が与えられれば定まる。これは，Cross PSD 関数の絶対値が与えられれば，コスペクトルとクオドスペクトルの 2 乗和が一定となる領域内に存在するということに相当する。前節に示した本極限外乱理論においては，Cross PSD 関数を構成するコスペクトル(実部)およびクオドスペクトル(虚部)を求める問題に帰着した。一方，(2-53)式より，水平 2 方向同時入力問題では，地動主軸間の Auto PSD 関数比$\gamma_{\rm org}$および地動軸と建物軸がなす角度θが変化することにより，地動主軸から建物軸方向にそれぞれ分離された地動成分間のコヒーレンス関数値が変動する。従って，コヒーレンスの変化に応じて，Cross PSD 関数の存在領域も変動する。そこで，本章では水平 2 方向同時入力問題を扱う上で, コヒーレンスにより定まる Cross PSD 関数の存在領域に関する制約を多次元入力地震動の相関性に関する制約条件に付加し, 次節で展開する極限外乱理論の解法にこれを適用する。このような Cross PSD 関数の制約条件を新たに考慮した Penzien-Watabe モデルをここでは拡張 Penzien-Watabe モデルと定義する。図 2-19 は，拡張 Penzien-Watabe モデルの概要を示している。

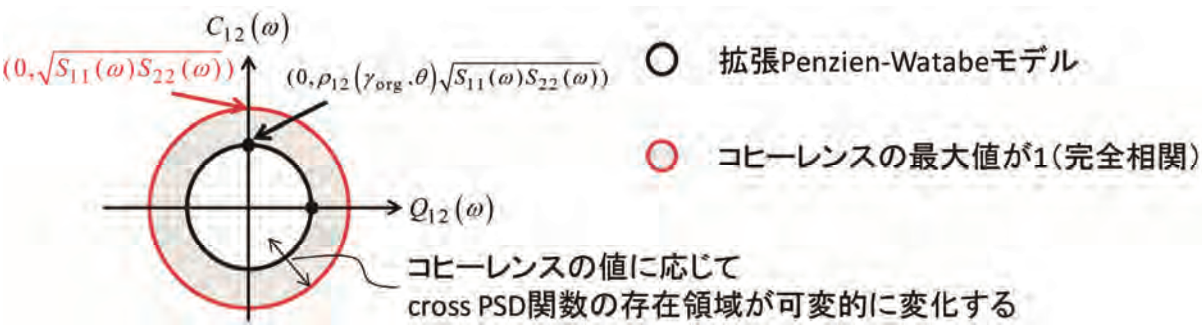


図 2-19 拡張 Penzien-Watabe モデルによる Cross PSD 関数の存在領域

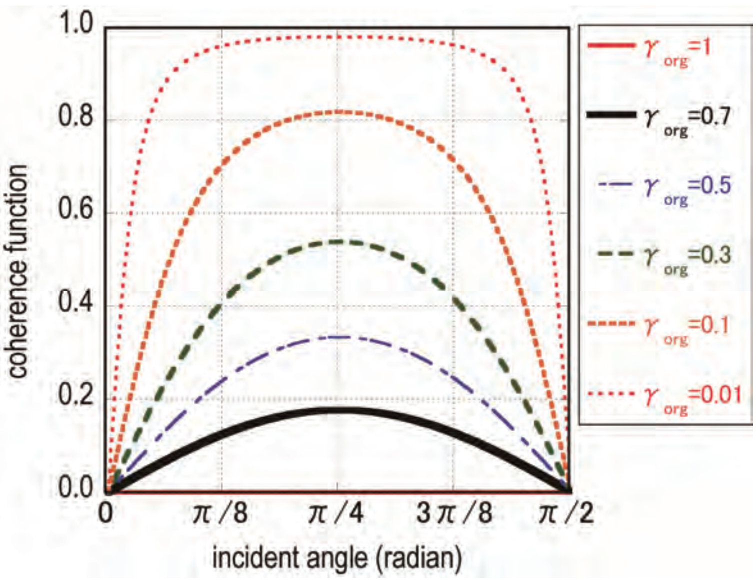


図 2-20 Penzien-Watabe モデルにおける入力角度の変動に対する
多成分入力地震動の成分間のコヒーレンス変化

図 2-20 は，種々の γ_{org} に対して地動主軸と建物軸との関係が変化した際のコヒーレンスの変動について図示したものである。γ_{org} =1 であるとは地動主軸方向と地動弱軸方向の地動成分の Auto PSD 関数が全ての振動数域で一致することを意味する。この場合はどのような入射角 θ に対しても，コヒーレンス値は常に 0 となり互いに無相関である。一方，γ_{org} が小さくなるにつれて，コヒーレンス値が大きくなる傾向にある。また，入射角 θ が 0 または $\pi/2$ の時には，地動主軸方向および弱軸方向の地動入力成分が，建物軸にそのまま入力されるため，地動主軸および弱軸間の地動成分は無相関であるという Penzien-Watabe モデルの性質により，コヒーレンス値は 0 となる。

図 2-21 は，従来の Penzien-Watabe モデルとコヒーレンスの変動を考慮した拡張 Penzien-Watabe モデルの比較を整理したものを示したものである。

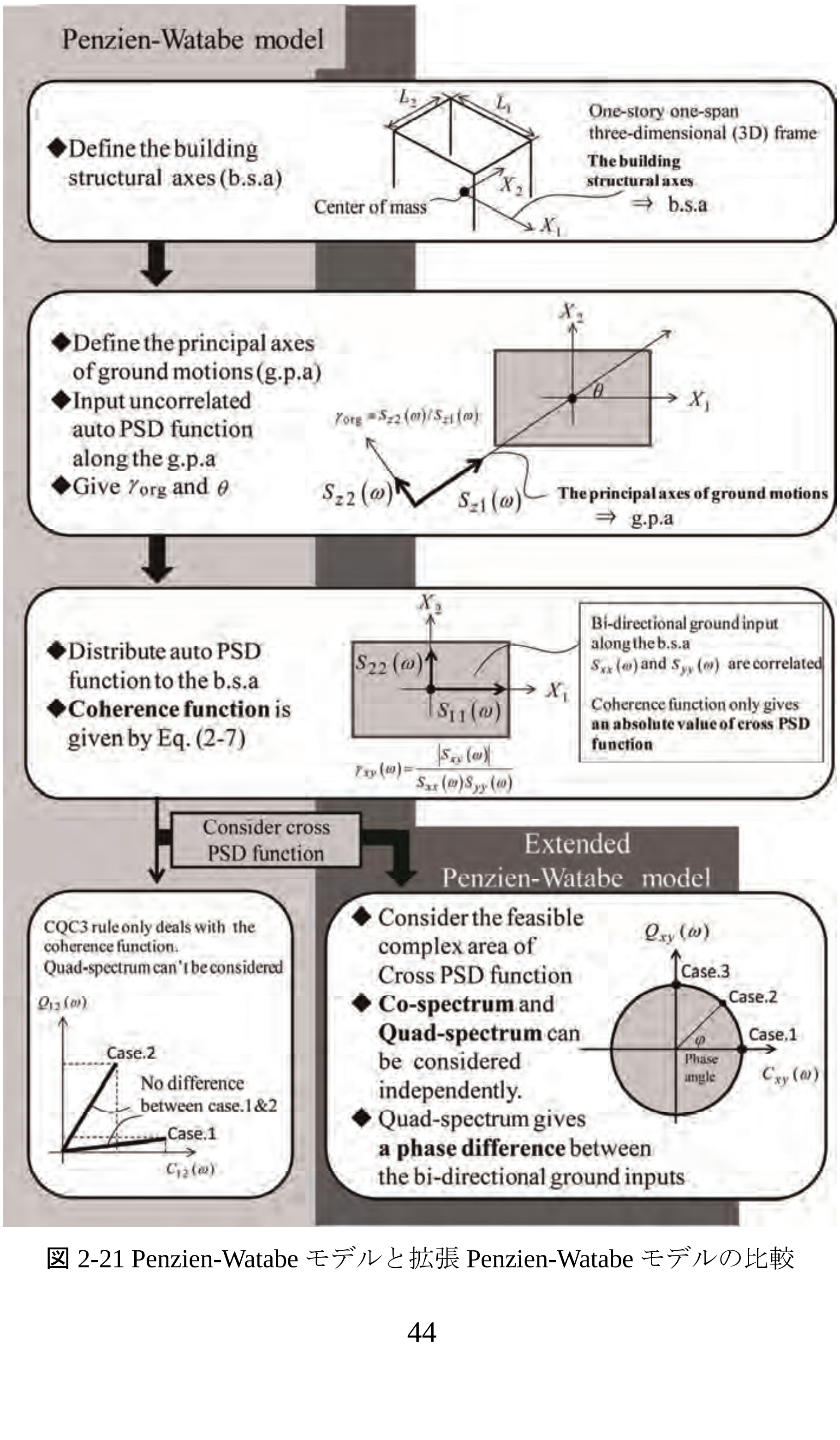


図 2-21 Penzien-Watabe モデルと拡張 Penzien-Watabe モデルの比較

2.5 最悪な相関関係を見出す極限外乱問題に対する解法

本極限外乱問題は， Cross PSD 関数において互いに独立とみなすことが可能な 2 変数(コスペクトル $C_{xy}(\omega)$ とクオドスペクトル $Q_{xy}(\omega)$)において，相関項を時間領域で最大化する最悪な Cross PSD 関数を決定する問題に帰着した。そこでまず Cross PSD 関数の $C_{xy}(\omega)$ および $Q_{xy}(\omega)$ が満たすべき制約条件の導出について触れる。2.1 節で示したコヒーレンス γ_{xy} の定義では，2 方向の Auto PSD 関数の相乗平均 $\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}$ に対する Cross PSD 関数の絶対値 $\left|S_{xy}(\omega)\right|$ の比で表わされた。さらにコヒーレンスの上下限値は±1 であり， $\left|\gamma_{xy}\right| \le 1$ を満たす。(2-7)式の右辺が 1 以下であるという条件を Cross PSD 関数 $S_{xy}(\omega)$ について解けば，次式を得る。

$$S_{xy}(\omega)S_{xy}(\omega)^{*} \le \gamma_{xy}^{2} \cdot S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega) \qquad (2\text{-}54)$$

ここに $S_{xy}(\omega)^{*}$ は $S_{xy}(\omega)$ の共役複素を表す。さらに(2-55)式を $C_{xy}(\omega)$ および $Q_{xy}(\omega)$ を用いて表すと，次式となる。

$$\left\{C_{xy}(\omega)\right\}^{2} + \left\{Q_{xy}(\omega)\right\}^{2} \le \gamma_{xy}^{2} \cdot S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega) \qquad (2\text{-}55)$$

前述した拡張 Penzien-Watabe モデルで示したように，(2-55)式は，Cross PSD 関数の実部および虚部である $C_{xy}(\omega)$ および $Q_{xy}(\omega)$ には存在可能領域を与えることが分かる。すなわち，コヒーレンス関数 γ_{xy} および各方向の Auto PSD 関数 $S_{xx}(\omega)$， $S_{yy}(\omega)$ が与えられれば， C_{xy} と Q_{xy} を 2 軸にもつ座標平面上(Cross PSD 関数に関する複素平面)で原点を中心とする $r = \gamma_{xy}\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}$ の円内の領域となることを表している。コヒーレンス関数の定義や意義は，2.1 節で既に述べたとおりであるが，コヒーレンス γ_{xy} の最大値は 1 であり，この時各方向の地震動成分は完全相関とみなされる。完全相関であるとは，相関係数が 1 となるような各方向の入力波形が，互いに線形従属の関係にあること(＝振幅比率が異なるのみで波形の形状が同一)に必ずしも該当するわけではないことに注意する必要がある。仮に両者の入力波形が完全に一致している場合では，当然ながらコヒーレンス γ_{xy} も全振動数域において 1 となり，Cross PSD 関数において虚部であるクオドスペクトルは存在しない。これは各方向の地震動の成分間に位相差が生じないことと密接に関係がある。しかしながら，コヒーレンス関数の定義式から，Cross PSD 関数の絶対値が各方向の Auto PSD 関数の相乗平均に等しくなるようなコスペクトルとクオドスペクトルの組み合せが存在しさえすれば, その時の多成分入力地震動のコヒーレンス関数 γ_{xy} は 1 となるために，この場合も 2 方向地動成分は完全相関となる。

ここで水平 2 方向成分の相関に関する項, すなわち(2-48)式第 2 項は, 時間と振動数の関数である。相関に関する項の最大値を見出すためには, 時間に関する最大化と振動数域における最大化の二重の最大化が必要となる。このような 2 変数関数の最大化を行うには，一般的には操作が煩雑である。そこで，相関に関する項の被積分項を再掲すれば，次式で表わされる。

$$z\left(C_{xy}(\omega), Q_{xy}(\omega)\right) = f_a(t;\omega)C_{xy}(\omega) + f_b(t;\omega)Q_{xy}(\omega) \qquad (2\text{-}56)$$

ここに，相関項の被積分項において $f_a(t;\omega)$, $f_b(t;\omega)$ は，(2-46)式および(2-47)式で定義したが，前述の議論より構造物モデルパラメターおよび入力地震動の包絡関数が既知量として与えられれば計算

が可能な時間tおよび振動数ωに関する確定関数である。(2-57)式は，相関に関する項がC_{xy}およびQ_{xy}のみの関数であることを表す。本極限外乱問題において，水平2方向同時入力による相関の影響を考慮した最悪な応答を見出すためには，(2-56)式を最大化するような C_{xy}およびQ_{xy}を見出せばよい。これは，時間tおよび振動数ωを与えた時に相関に関する項の被積分項を最大化する Cross PSD の決定する問題に他ならない。このことは，(2-48)式が各時刻において振動数に関する積分を行うことにより2乗平均応答の時刻歴変化を評価しているため, 振動数ごとで被積分関数が最大化されれば, 当然ながら振動数に関する積分後の変位応答も極大となるためである。図 2-22 は，最悪な Cross PSD 関数の決定の概念を図示したものである。

改めて(2-56)式をみれば， $C_{xy}(\omega)$および$Q_{xy}(\omega)$は未知数であり， $f_a(t;\omega), f_b(t;\omega)$は，時間$t$および振動数$\omega$に関する確定関数である。従って，(2-56)式は，ある任意のt,ωに対してC_{xy}, Q_{xy}, zを3軸にもつ3次元空間において平面を形成することになる。また， C_{xy}およびQ_{xy}の制約条件としては，座標軸原点からの XY 平面上における距離が等しい円内にC_{xy}およびQ_{xy}が存在することにある((2-55)式)。本制約条件は， z 軸方向に関しては無関係に定まるので， C_{xy}, Q_{xy}, z を 3 軸にもつ 3 次元空間内において円筒形を形成する。図 2-23 には, (2-55)式による Cross PSD 関数の制約条件と(2-56)式による評価関数の関係について図示する。(2-56)式を最大化するためには，固定されたt,ωについて，図 2-24 で示される評価関数の存在領域内でzを最大にするようなC_{xy}およびQ_{xy}を決定すればよい。このようなC_{xy}およびQ_{xy}は，コヒーレンス関数γ_{xy}の上限値を1と仮定する場合は，Cross PSD 関数の存在領域内の最外縁上，すなわち，中心が$C_{xy}(\omega)=Q_{xy}(\omega)=0$で$r=\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}$の円筒表面上に必ず存在し，これと平面との交点の極大値が相関に関する項の被積分項の最大値である。これらを踏まえて本極限外乱理論における最悪な相関性を与える$C_{xy}(\omega)$と$Q_{xy}(\omega)$を導出する。

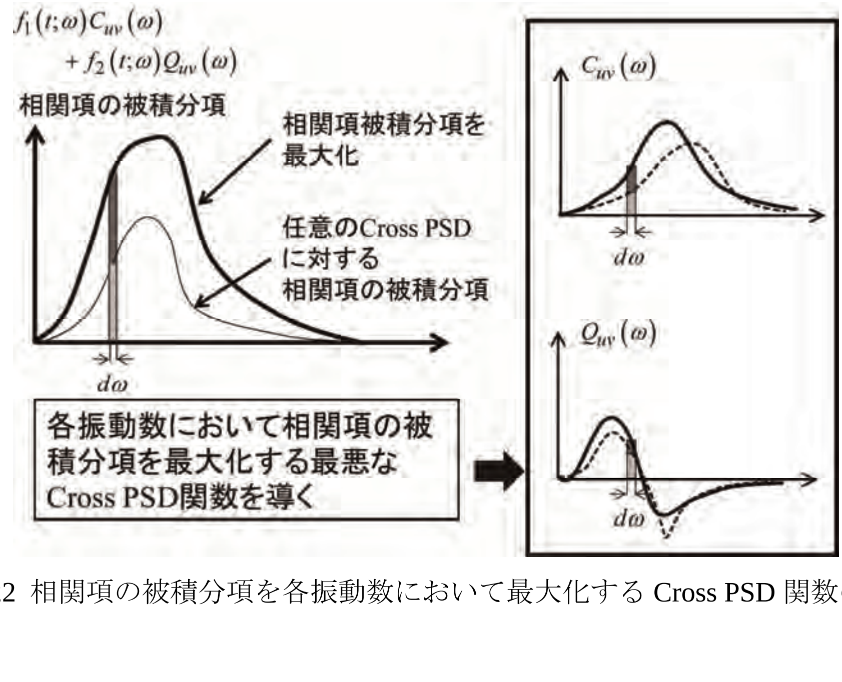


図 2-22 相関項の被積分項を各振動数において最大化する Cross PSD 関数の導出

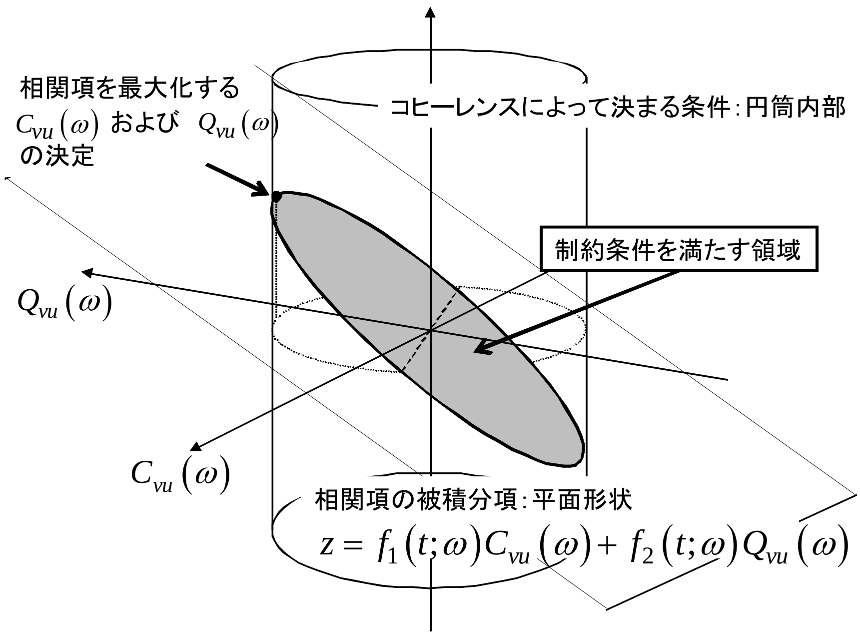


図 2-23 制約条件および評価関数の関係

$$\begin{cases} C_{xy}(\omega)^2 + Q_{xy}(\omega)^2 \le \gamma_{xy}^2 S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega) & \text{(2-57)} \\ z\left(C_{xy}(\omega), Q_{xy}(\omega)\right) = f_a(t;\omega)C_{xy}(\omega) + f_b(t;\omega)Q_{xy}(\omega) & \text{(2-58)} \end{cases}$$

上式において変数 $C_{xy}(\omega)$ または $Q_{xy}(\omega)$ を 1 つ消去し，$z_{\max}$ を求めればよい。

まず，$C_{xy}(\omega)$ を求める。(2-57)式は不等式制約であるが，図 2-23 に示すように，求めるべき $C_{xy}(\omega)$ および $Q_{xy}(\omega)$ は，等号時に成立するものと考えられる。そこで，(2-58)式を $Q_{xy}(\omega)$ について解けば次式を得る。

$$Q_{xy}(\omega) = \pm\gamma_{xy}\sqrt{S_{yy}(\omega)S_{xx}(\omega) - C_{xy}(\omega)^2} \tag{2-59}$$

(2-58)式に(2-59)式を代入すれば，次式となる。

$$z\left(C_{xy}(\omega), Q_{xy}(\omega)\right) = f_a(t;\omega)C_{xy}(\omega) \pm f_b(t;\omega)\gamma_{xy}\sqrt{S_{yy}(\omega)S_{xx}(\omega) - C_{xy}(\omega)^2} \tag{2-60}$$

(2-60)式において $z\left(C_{xy}(\omega), Q_{xy}(\omega)\right)$ が極値(= $z_{\max}$)を取りうるのは，$C_{xy}(\omega)$ に関する 1 階微分を 0 として解けば次式が得られる。

$$\begin{aligned} & f_a(t;\omega) \pm \frac{\gamma_{xy} f_b(t;\omega) C_{xy}(\omega)}{\sqrt{S_{yy}(\omega)S_{xx}(\omega) - C_{xy}(\omega)^2}} = 0 \\ & \Rightarrow C_{xy}(\omega) = \gamma_{xy} f_a(t;\omega) \frac{\sqrt{S_{yy}(\omega)S_{xx}(\omega)}}{\sqrt{f_a(t;\omega)^2 + f_b(t;\omega)^2}} \end{aligned} \tag{2-61}$$

ここで，(2-61)式の符号の選定には十分に配慮する必要がある。すなわち，図 2-23 に示したよう相関に関する項が制約条件下で極値となる場合には，最大点と最小点が存在するので，対象とする応答量の正負の設定に応じて相関に関する項を最大化する $C_{xy}(\omega)$ の符号を定めなければならない。また $Q_{xy}(\omega)$ も同様に導出可能で，相関に関する項を最大化する最悪な $Q_{xy}(\omega)$ は次式で得られる。

$$Q_{xy}(\omega) = \gamma_{xy} f_b(t;\omega) \frac{\sqrt{S_{yy}(\omega) S_{xx}(\omega)}}{\sqrt{f_a(t;\omega)^2 + f_b(t;\omega)^2}} \tag{2-62}$$

(2-61)式および(2-62)式で表わされる最悪な Cross PSD 関数を(2-48)式第 2 項で表わされる相関に関する項に代入すれば，任意の時刻 t において水平 2 方向同時入力を受ける柱頭縁応力における 2 乗平均応答の相関に関する項の最悪な応答値は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} &E\left[\sigma_1(t_1)\sigma_2(t_2) + \sigma_2(t_2)\sigma_1(t_1)\right] \\ &= 2\gamma_{xy}(\gamma_{\mathrm{org}},\theta) A_{\sigma1} A_{\sigma2} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{f_a(t;\omega)^2 + f_b(t;\omega)^2} \sqrt{S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega)} d\omega \end{aligned} \tag{2-63}$$

上述した本極限外乱問題の解法とは異なるが，類似した問題に対する解法が Abbas らにより以下のように示されている。Abbas らが導いた最悪な Cross PSD 関数の解は，本質的には一致している。しかしながら，Abbas らは，1 方向入力の応答のモード間の相関関係に関する定式化の中でこれらを示しており，本章で扱っている多次元入力地震動の相関性に関する問題とは事象が異なる。ここでは，Abbas らが示した方法に基づいて，多成分同時地震動入力を受ける柱頭縁応力の 2 乗平均応答における最悪な相関性を見出す方法を以下に示す。

相関に関する項の被積分項(2-59)式において，$\mathbf{S}_{xy} = \left\{C_{xy}(\omega), Q_{xy}(\omega)\right\}$，$\mathbf{F} = \left\{f_1(t;\omega), f_2(t;\omega)\right\}^T$ とそれぞれの項の要素をベクトルとみなせば，(2-63)式は図 2-24 に示すようにベクトルの内積とみなすことができる。従って，2 乗平均応答における相関項の被積分項は，次式で表わされる。

$$\begin{aligned} f_1(t;\omega) C_{xy}(\omega) + f_2(t;\omega) Q_{xy}(\omega) &= \mathbf{S_{uv}F} \\ &= \left|S_{xy}(\omega)\right| \sqrt{f_1(t;\omega)^2 + f_2(t;\omega)^2} \cos(\Phi - \theta) \end{aligned} \tag{2-64}$$

ここで Φ および θ は，それぞれ $\mathbf{S}_{xy}$ および $\mathbf{F}$ の位相角である。Cross PSD 関数の絶対値は，各方向の Auto PSD 関数およびコヒーレンス関数によって次式で与えられる。コヒーレンス関数の制約条件を考慮すれば，Cross PSD 関数の絶対値は，既知量として与えられ次式を満たす。

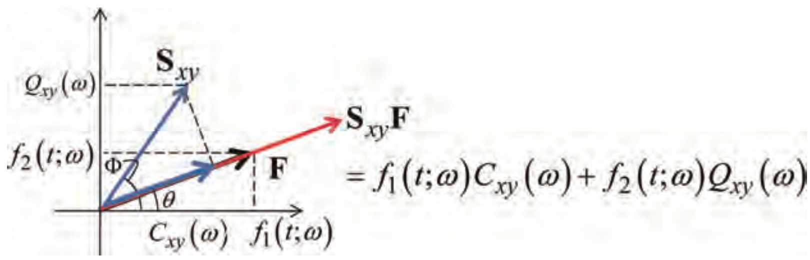


図 2-24 2 乗平均応答における相関に関する項の被積分項の解釈

$$\left|S_{xy}(\omega)\right| = \gamma_{xy}\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)} \tag{2-65}$$

ここで水平 2 方向同時入力問題では，コヒーレンス関数が変動する点に留意する。(2-65)式が最大となるのは，$\cos(\Phi-\theta)$が最大のときである。このことからΦおよびθは次の関係式を満たす。

$$\begin{aligned}&\Phi = \theta\\&\Rightarrow \frac{Q_{xy}(\omega)}{C_{xy}(\omega)} = \frac{f_2(t;\omega)}{f_1(t;\omega)}\end{aligned} \tag{2-66}$$

コスペクトルおよびクオドスペクトルは，Cross PSD 関数の絶対値に$\cos\Phi$および$\sin\Phi$をそれぞれ乗じることにより得られるので, 最悪な相関関係となるコスペクトルおよびクオドスペクトルは次式で求められる。

$$\begin{aligned}C_{xy}(\omega) &= \left|S_{xy}(\omega)\right|\cos\theta\\&= \gamma_{xy}\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}\frac{f_1(t;\omega)}{\sqrt{f_1(t;\omega)^2+f_2(t;\omega)^2}}\end{aligned} \tag{2-67}$$

$$\begin{aligned}Q_{xy}(\omega) &= \left|S_{xy}(\omega)\right|\sin\theta\\&= \gamma_{xy}\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}\frac{f_2(t;\omega)}{\sqrt{f_1(t;\omega)^2+f_2(t;\omega)^2}}\end{aligned} \tag{2-68}$$

(2-67)式および(2-68)式は，いずれも前述した方法と同様の結果であることが確認できる。

2.6　最悪な相関関係を有する多成分模擬入力地震動の作成法

互いに相関のある多成分入力地震動をモンテカルロシミュレーション（以下 MCS）によって生成する方法は星谷により次のように提示されている。極限外乱の理解において有用なため, 以下に示す。

水平方向地動入力における定常成分は，次式により生成される。

$$w_x(t) = \sum_{k=1}^{N}\left(a_k\cos\omega_k t + b_k\sin\omega_k t\right) \tag{2-69}$$

ここに

a_k　：平均値 0，標準偏差$\sigma_{xk} = \sqrt{2S_{xx}(\omega_k)\Delta\omega}$のガウス確率変数

b_k　：a_kに対して独立で平均値 0，標準偏差$\sigma_{xk} = \sqrt{2S_{xx}(\omega_k)\Delta\omega}$のガウス確率変数

$\Delta\omega$　：$\Delta\omega = \dfrac{\omega_u-\omega_l}{N}$

$\Rightarrow\omega_u$およびω_lは考慮する振動数の上・下限値。

ω_k　：$\omega_k = \omega_l + \left(k-\dfrac{1}{2}\right)\Delta\omega$　（$k = 1, 2, \cdots, N$）

一方，(2-69)式により生成した水平動に対して指定した相関関係を有する異なる方向の水平地動の定常成分は，コスペクトル$C_{xy}(\omega)$およびクオドスペクトル$Q_{xy}(\omega)$を用いて，次式によりシミュレートできる。

$$w_y(t)=\sum_{k=1}^{N}\left\{c_k\cos\left(\omega_k t+\alpha_k\right)+d_k\sin\left(\omega_k t+\alpha_k\right)\right\} \tag{2-70}$$

ここに

c_k　：a_k を条件とする条件付ガウス過程。平均値 $\gamma_{xy}(\omega_k)\sqrt{S_{yy}(\omega_k)/S_{xx}(\omega_k)}a_k$，標準偏差 $\sigma_{yk}\sqrt{1-\gamma_{xy}^2(\omega_k)}$ のガウス確率変数であり，$\sigma_{yk}=\sqrt{2S_{vv}(\omega_k)\Delta\omega}$

d_k　：b_k を条件とする条件付ガウス過程。平均値 $\gamma_{xyk}\sqrt{S_{yy}(\omega_k)/S_{xx}(\omega_k)}b_k$，標準偏差 $\sigma_{yk}\sqrt{1-\gamma_{xy}^2(\omega_k)}$ のガウス確率変数。

α_k　：水平動と上下動の Cross PSD 関数における位相角，$\alpha_k=\tan^{-1}\left(Q_{xy}(\omega_k)/C_{xy}(\omega_k)\right)$

仮にコヒーレンス関数 γ_{xy} が 1 であるときには，(2-66)式における c_k および d_k の標準偏差は 0 となる。従って，c_k および d_k は(2-65)式で定まった a_k および b_k に対して平均値のみが異なり，線形従属の関係にある。従って，相関性を有する多成分入力地震動を生成する上では，位相角 α_k が重要なファクターとなる。上述の方法によって地震動の定常成分 $w_x(t)$ および $w_y(t)$ が得られれば，包絡関数を乗じることにより，多成分入力地震動の模擬波をシミュレートすることができる。

2.7　数値解析例

本節では，適切な地震動の入力モデルの制約条件のもとで，本研究により得られた多成分入力地震動における最悪な相関関係を与える Cross PSD 関数を導出し，入力地動成分間の相関関係が応答に及ぼす影響について数値例を用いて示していくことを目的とする。また，多成分入力地震動の影響を考慮した現行の応答評価手法で代表的な SRSS 法や，従来に提案されてきた CQC3 法との比較を行い，本研究により展開してきた極限外乱問題に対する解法ならびにそれを基にした新しい応答評価手法としての意義を示す。

2.7.1　建物モデルのパラメター

ここでは，1 層 1 スパンの立体骨組の部材諸元および等価な 1 質点系に置換した際の層剛性などについて記す。表 1 は，柱および梁の部材諸元を示したものである。なお，建物軸 X_2 方向のスパン長 L_2 は 15.0m で固定する。建物軸各方向の層剛性の違いが応答に及ぼす影響について検証するため建物軸 X_1 方向のスパン長 L_1 を変動させる。表 2 には，$L_1=25\mathrm{m}$ の場合における各方向の層剛性，質量および 1 次固有周期を記した。水平 2 方向の固有円振動数が一致するのは，$L_1=15.0\mathrm{m}$ の時である。

表 2-2　部材諸元

	柱	梁
断面寸法 (mm)	□-1500×1500×50	H-1200×600×40×32
断面積 (mm^2)	2.90×10^5	8.57×10^4
単位重量 (kg/m)	2273	673

表 2-3　代表的なスパン長における各方向層剛性，質量および固有周期

X_1 方向スパン長 (m)	25
X_1 方向水平剛性 k_1 (N/mm)	6.83×10^8
X_2 方向水平剛性 k_2 (N/mm)	7.46×10^8
質量 m_1 (kg)	5.93×10^6
質量 m_2 (kg)	3.65×10^6
X_1 方向固有周期 T_1 (s)	0.585
X_1 方向固有周期 T_2 (s)	0.440

2.7.2　地震動のパラメター

ここでは, 水平 2 方向同時地動入力に対する応答解析で用いる入力地震動のパラメターを記す。2.4.4 で展開したように，水平 2 方向同時入力問題では Penzien-Watabe モデルに基づき地動主軸の存在を仮定する。入力地震動のパラメターは，2 方向入力地動成分の包絡関数 $c_x(t)$ および $c_y(t)$，地動主軸方向の地動成分の Auto PSD 関数 $S_{z1z1}(\omega)$，地動主軸方向および弱軸方向の Auto PSD 関数の比率 γ_{org}，地動主軸と建物軸がなす角度 θ である。

各方向の地動成分の包絡関数は，最大振幅値で基準化された Jennings 型で与え，次式で定義する。なおここでは，水平 2 方向について同一の包絡関数を用いる。

$$\begin{aligned} c_x(t) &= (t/3.0)^2 && (0 \le t \le 3) \\ c_x(t) &= 1.0 && (3 \le t \le 12.5) \\ c_x(t) &= e^{-0.24(t-12.5)} && (12.5 \le t \le 40) \end{aligned} \tag{2-71}$$

次に，2 方向地動成分の Auto PSD 関数の設定について記述する。ここでは Auto PSD 関数を規定する上で，2 つの異なる問題について考える。まず 1 つ目は，建物軸 X_1，X_2 方向に与えられる Auto PSD 関数を規定し，建物軸方向に入力される地動成分間のコヒーレンス値を 1 とする場合である。地動主軸を考慮した Penzien-Watabe モデルに基づけば, 建物軸方向の入力地動成分間のコヒーレンスが 1 となるのは，$\gamma_{\mathrm{org}}=0$ とした場合に相当する。このような地動入力を地動主軸 1 方向入力と称することにする。ここで，確率論的な観点に従えば，Auto PSD 関数はフーリエ振幅スペクトルに準じるものであるため，地動成分の時刻歴波形の位相特性は任意である。しかしながら，地動主軸 1 方向入力では，地動主軸方向の地動成分は何らかの位相特性を有しており確定的に規定されるため，地動主軸方向成分の Auto PSD 関数を建物軸に分配したとしても建物軸方向に入力される地動成分間には位相差は生じないと考えられる。従って，地動主軸 1 方向入力では建物軸に入力される地動成分間のコヒーレンスは全振動数において 1 となる完全相関であり, 成分間の位相差(=クロススペクトルにおける虚部クオドスペクトル)が常に 0 となるため，最悪な位相差を見出す極限外乱理論を適用する余地はないといえる。2.7.3 節では，建物軸方向の Auto PSD 関数の和が一定のもとで，建物軸方向の Auto PSD 関数の比率 γ を変化させ，$\gamma = 0.0, 0.25, 0.75, 1.0$ の 4 つの場合について，スパン長の変動に対する極限応答の変化を検証する。前述のように建物軸方向の成分間のコヒーレンス値を 1 とみなしたうえで，最悪な位相差を見出す極限外乱理論を適用するため，Penzien-Watabe モデルに基づかないことに留意する必要がある。

次に 2.7.4 節では，地動主軸からの視点で入力地動成分を与える問題を扱う。すなわち，地動主軸に対する弱軸方向の地動成分の Auto PSD 関数の比 γ_{org} を規定した上で, 入射角 θ の変動を考慮する。建物軸方向に入力される各方向 Auto PSD 関数を(2-50)式により算定し，拡張 Penzien-Watabe モデルに基づいてコヒーレンス値が算定される。特に，$\gamma_{\mathrm{org}} \neq 0$ の時には地動弱軸方向に地動成分を有するため，これを地動主軸 2 方向入力と称することとする。

前述のいずれの問題においても，地動主軸および地動弱軸または建物各軸方向の Auto PSD 関数の和を一定と仮定する。ここで，地動成分の Auto PSD 関数は，(2-13)式で示したように非減衰速度応答スペクトルにより近似される。そこでここでは，Auto PSD 関数 $S_{z1z1}(\omega)$ および $S_{z2z2}(\omega)$ の和または，$S_{xx}(\omega)$ および $S_{yy}(\omega)$ の和である $S_{\mathrm{All}}(\omega)$ が，レベル 2 地震動に対する安全限界時の加速度応答スペクトルに相当するものとして与えられるとする。図 2-26 には，$S_{\mathrm{All}}(\omega)$ および 2.7.3 節で扱う地動主軸 1 方向入力問題における $\gamma = 0.25, 0.75, 1.0$ の 3 つのケースの Auto PSD 関数の組み合せを図示したものである。以上の 2 つの問題に対する数値解析例の結果および考察については，2.7.3 節および 2.7.4 節に示すが，2 つの問題の概要を整理したものを図 2-27 に示す。

2.7.4 節における地動主軸 2 方向入力問題では，地動主軸と弱軸方向の Auto PSD 関数の比 γ_{org} および入射角 θ を設定する必要がある。2.7.4 節では，$\gamma_{\mathrm{org}} = 0.0, 0.25, 0.75, 1.0$ とし，入射角 θ に関するパラメトリック解析を行う。$S_{\mathrm{All}}(\omega)$，γ_{org} および θ が与えられた時に建物軸各方向に作用する地動成分の Auto PSD 関数は，次式で表わされる。

$$S_{xx}(\omega) = \frac{\cos^2\theta + \gamma_{\mathrm{org}}\sin^2\theta}{1+\gamma_{\mathrm{org}}} S_{\mathrm{All}}(\omega),\quad S_{yy}(\omega) = \frac{\sin^2\theta + \gamma_{\mathrm{org}}\cos^2\theta}{1+\gamma_{\mathrm{org}}} S_{\mathrm{All}}(\omega) \qquad \text{(2-72a, b)}$$

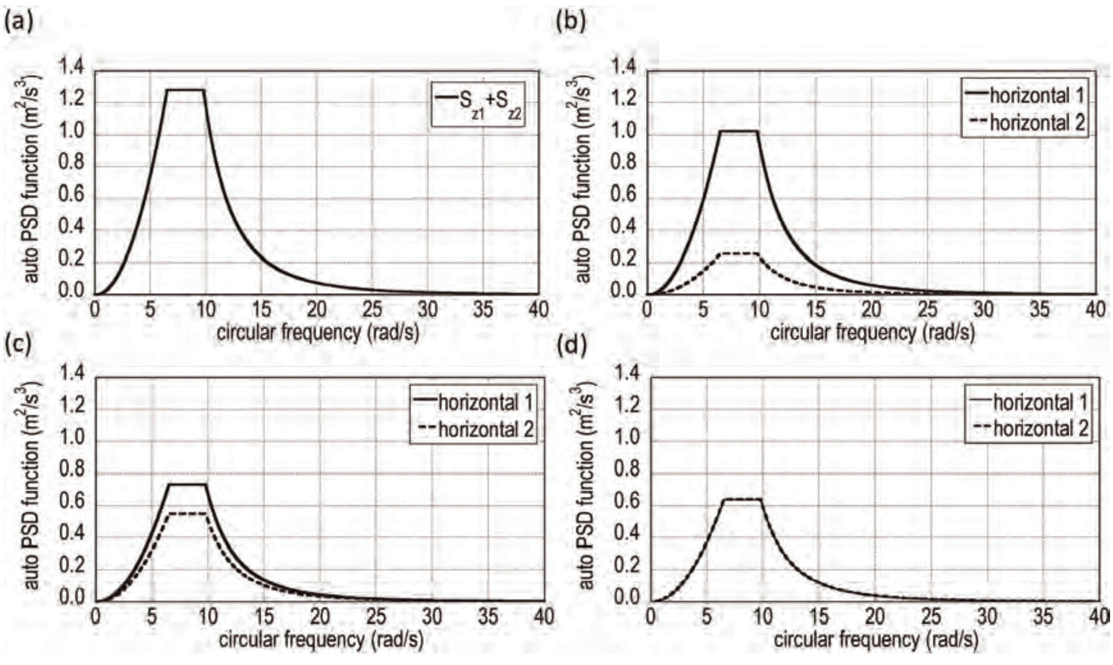


図 2-25 種々の Auto PSD 関数の組み合せ

(a) Auto PSD 関数和 $S_{\mathrm{All}}(\omega)$, (b) $\gamma = 0.25$, (c) $\gamma = 0.75$, (d) $\gamma = 1.0$

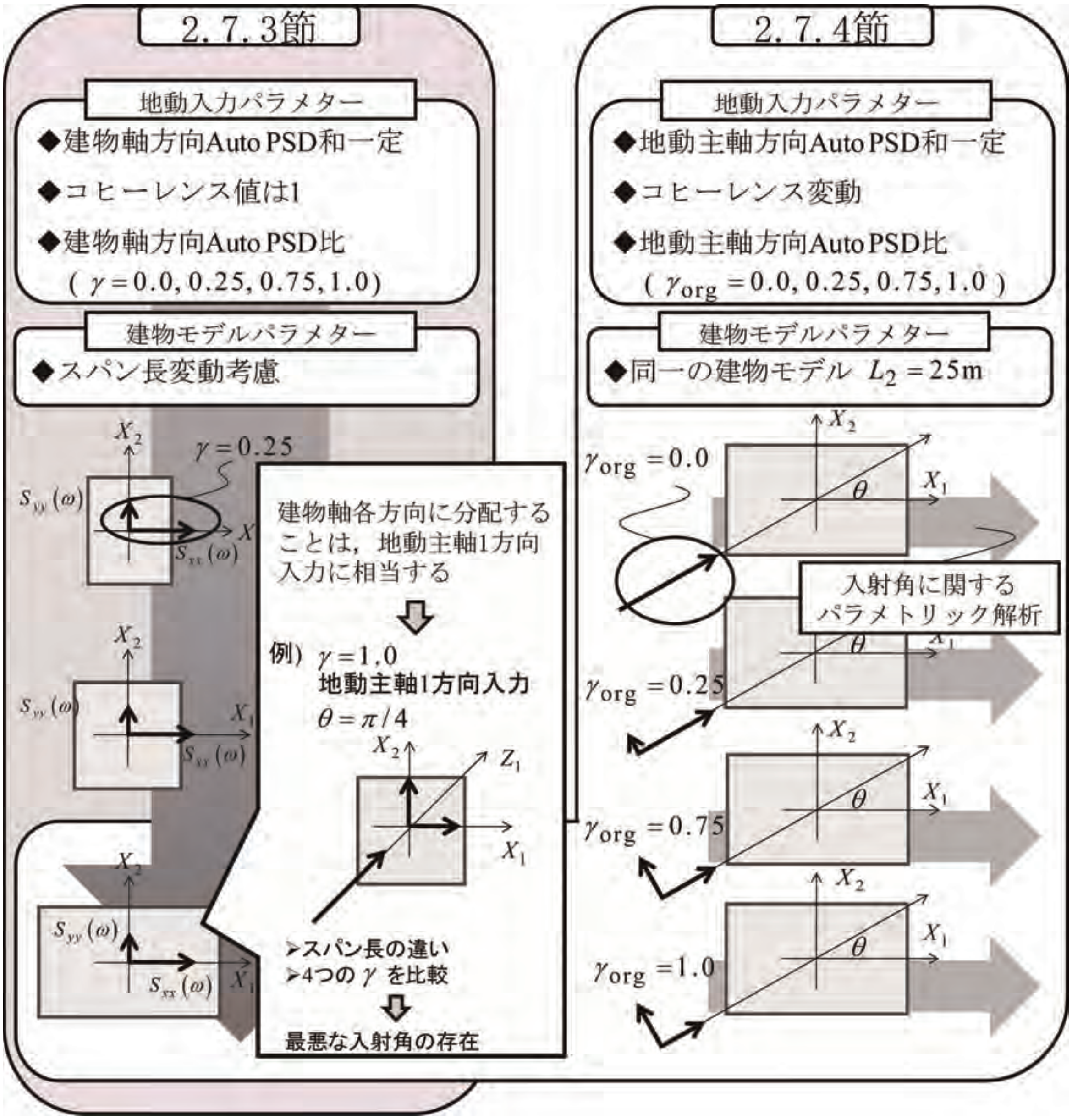


図2-26 地動主軸1方向入力問題と地動主軸2方向入力問題の比較

2.7.3 建物モデルの変動が極限応答に及ぼす影響

本節では，建物軸の各方向に入力される地動成分の Auto PSD 関数の比率を規定する。ここで，本極限外乱理論が対象としている応答量は，任意の時刻における 2 乗平均応答である。すなわち，(2-48)式において，時刻 t を漸増させると，その時刻で定義される柱頭縁応力の 2 乗平均応答が得られる。仮に入力地震動の継続時間 T に対して(2-48)式における時刻 t を十分に大きく取ると，2 乗平均応答は限りなく 0 に近づく。従って，ここでは時刻 t を 0 から漸増させていき，柱頭縁応力の 2 乗平均応答の最大値を抽出し，これを評価指標とする。建物軸方向に入力される地動成分の Auto PSD 関数の比率 γ は，0.0，0.25，0.75，1.0 の 4 つの場合について解析する。図 2-27(a-d)には，それぞれの γ に対して，スパン長を連続的に変動させた時の立体骨組における柱頭縁応力の 2 乗平均応答(≒標準偏差)の最大値を図示したものである。図中において，perfectly correlated (=完全相関)とは，水平 2 方向入

力地震動の Cross PSD 関数のクオドスペクトル $Q_{xy}(\omega)$ が 0 であることに相当する。すなわち，いわゆる相関係数が 1 となるような水平 2 方向地動成分に位相差がない入力であり, 地動主軸 1 方向入力に相当するものである。この時のコスペクトル $C_{xy}(\omega)$ は $\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}$ となる。CQC3 法では，Cross PSD 関数の実部および虚部をそれぞれ独立に与えることができないため，コヒーレンスが最大となる完全相関の場合が CQC3 法を用いて得られる最大応答となる。また，図中において，Case.2 および Case.3 は，Cross PSD 関数の存在領域内における $C_{xy}(\omega)$ および $Q_{xy}(\omega)$ が，全ての振動数域において Case.2 : $C_{xy}(\omega)=Q_{xy}(\omega)=\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)/2}$ ， Case.3 : $C_{xy}(\omega)=0$ および $Q_{xy}(\omega)=\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}$ で与えられる場合を考慮した。

図 2-27(a)において $\gamma=0$ の場合，建物軸 X_2 方向には地動入力が存在しない。従って，多成分入力地震動の相関に関する項が存在しないため，本極限外乱理論に基づいて得られる極限応答と通常の 1 方向入力に対する応答が完全に一致する。一方，図 2-27(b),(c)および(d)において $\gamma\neq0$ のときは， X_2 方向にも地動入力が存在する。これらを比較すれば，γ が大きくなるほど相関による応答の増幅の影響が大きいことがわかる。$\gamma=1.0$ の時に応答比は，スパン長 $L_1=15.0\mathrm{m}$ において最大値 1.41=$\sqrt{2}$ となる。このようにスパン長 $L_1=15.0\mathrm{m}$ において相関の影響が最も大きくなるのは，建物軸 X_1 方向および X_2 方向の水平方向剛性が一致するためである。$L_1=15.0\mathrm{m}$ の時に，極限外乱応答と CQC3 法に相当する完全相関を考慮した入力外乱に対する応答は，ほぼ一致している。これは，クオドスペクトルが相対的に小さくなるために，CQC3 法で評価した場合と差異がないことに起因する。

図 2-27(b) と図 2-27(d) の場合を比較し各スパン長について着目すれば，スパン長が長い ($L_1>15.0\mathrm{m}$)場合では，前者の方が応答量は大きいことが確認できる。逆にスパン長が短い ($L_1<15.0\mathrm{m}$)場合は，後者の方が応答量は大きい。このことから，建物モデルのスパン長の組み合せに応じて対象とする応答量を最大化する γ が存在すると考えられる。本節における数値例では γ と地動主軸を考慮した Penzien-Watabe モデルとの対応を考慮することは困難であるが, 応答量を最大化する γ が存在するということは, 応答を増大させるような特定の入力方向が存在することを示唆していると考えられる。次節では，地動主軸 2 方向入力問題について入射角度 θ をパラメターとして連続的に変動させたときの極限応答特性の変化について検証を行う。

また図 2-28 は，スパン長 $L_1=25\mathrm{m}$ のモデルに対して $\gamma=1$(：建物軸方向に入力される地動成分の Auto PSD 関数が同一となる)における，本極限外乱理論により得られる最悪な Cross PSD 関数の実部 $C_{xy}(\omega)$ および虚部 $Q_{xy}(\omega)$ をそれぞれ図示したものである。Cross PSD 関数の定義に従えば，Cross PSD 関数は, 振動数 ω のみの関数である。しかしながら, 本章で扱う極限外乱問題の解である $C_{xy}(\omega)$ および $Q_{xy}(\omega)$ ((2-59)式および(2-61)式)は，2 乗平均応答を定義する時刻の関数で表わされる $f_a(t;\omega)$ および $f_b(t;\omega)$ の関数でもあるため，振動数特性が時間と共に変化する。従って， $C_{xy}(\omega)$ および $Q_{xy}(\omega)$ は，図 2-28 に図示したように，時間-振動数域の 3 次元上で図示する必要がある。図 2-28 において，コスペクトルは，2 乗平均応答を定義する時刻によらず変化は乏しく，各方向の Auto PSD 関数の相乗平均と類似した形状となっていることが確認できる。一方, クオドスペクトルについては, 2 乗平均応答を定義する時刻に応じて変化が見られ，最悪な位相角の決定に大きく寄与していると考えられる。

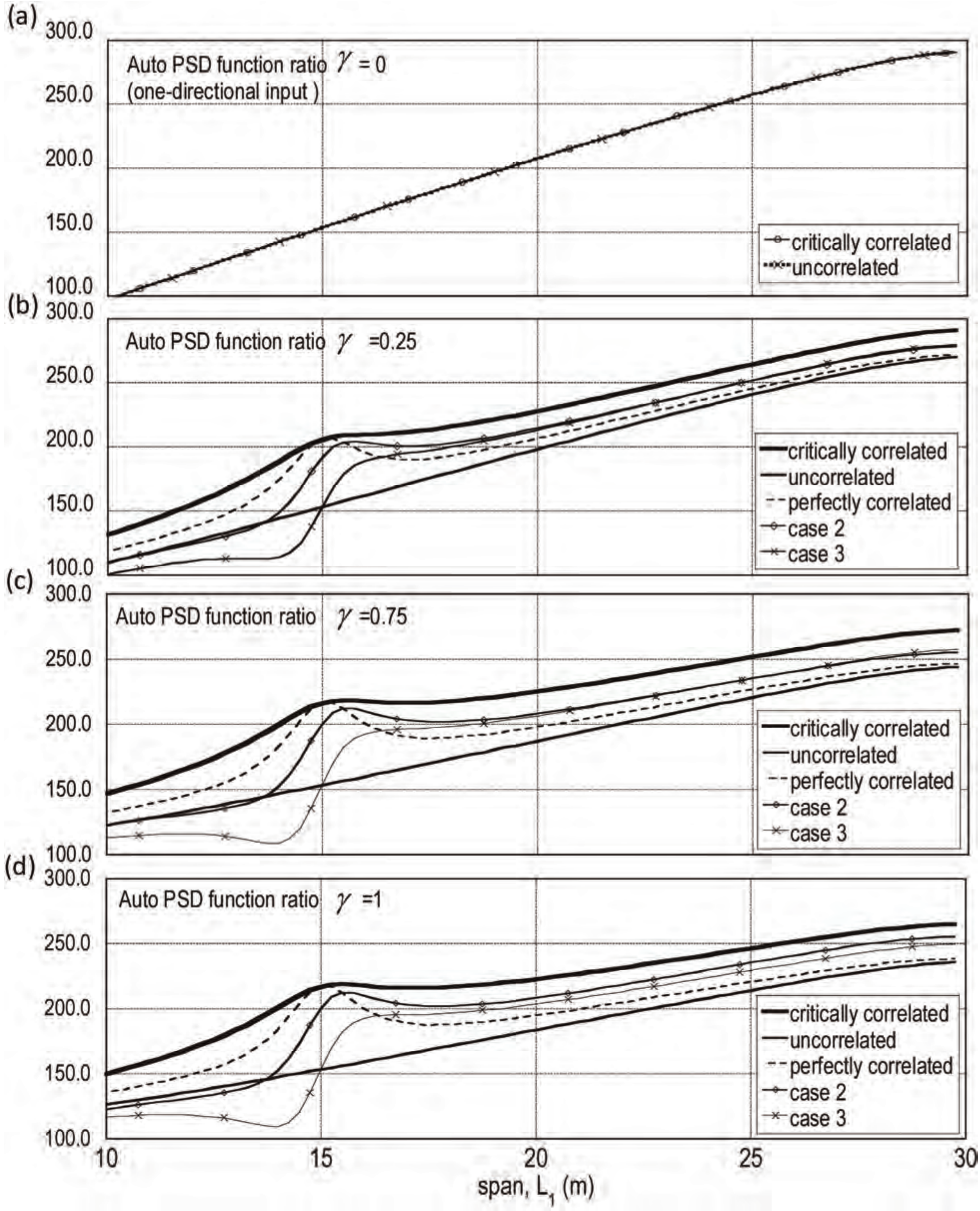
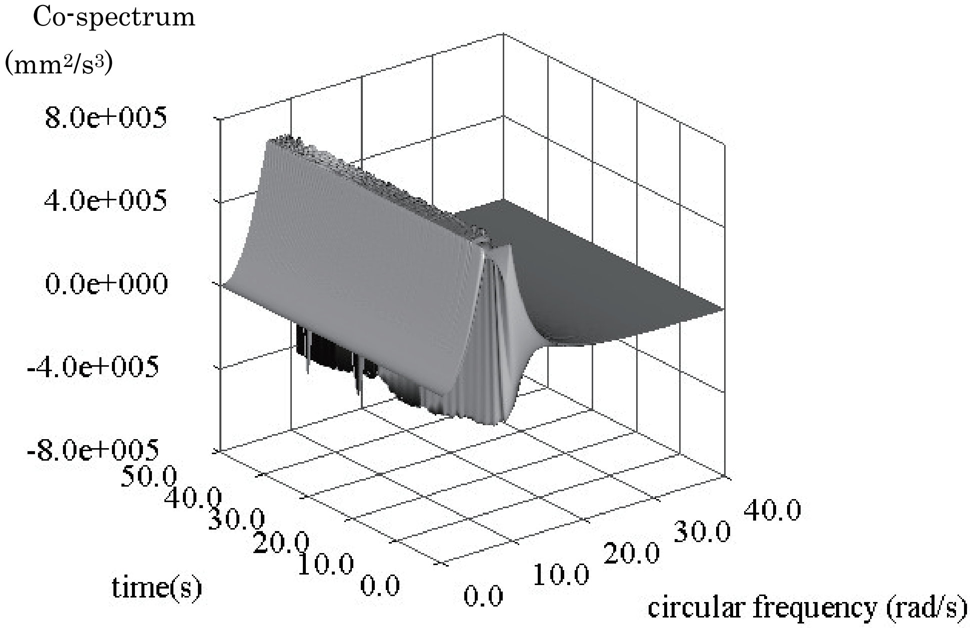


図2-27 構造物特性(スパン長)の変動が極限応答に及ぼす影響と
任意の相関関係を有する入力に対する極限応答との比較
(a) $\gamma=0$, (b) $\gamma=0.25$, (c) $\gamma=0.75$, (d) $\gamma=1$



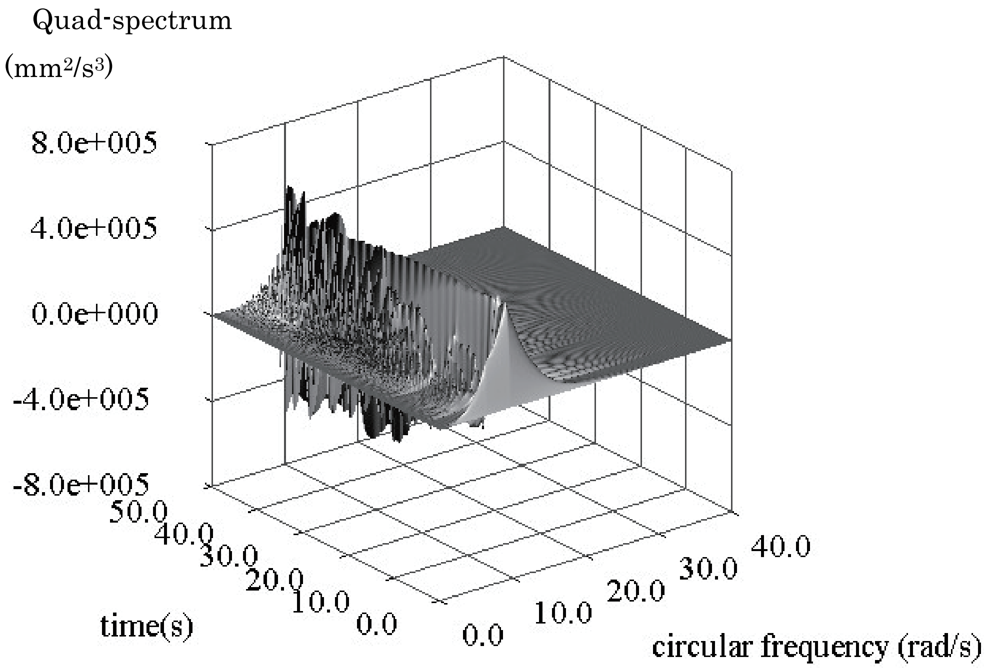


図2-28 コスペクトル およびクオドスペクトル　($\gamma = 1, L_1 = 25\mathrm{m}$)

2.7.4 地動主軸2方向入力問題において地動主軸と建物軸の角度の変動が極限応答に及ぼす影響

前節では，建物軸方向の入力地動成分の Auto PSD 比γをパラメターの一つとして与え，建物モデルのスパン長を連続的に変動させた。前節の結果から，対象とする建物モデルに対して地動成分の最悪な入射角が存在すると考えられる。そこで，本節では，地動主軸および弱軸方向の地動成分が有する Auto PSD 関数$S_{z1z1}(\omega)$および$S_{z2z2}(\omega)$の比率γ_{org}を指定した上で，地動主軸と建物軸がなす入射角度の連続的な変動に対する柱頭縁応力の応答特性について考察を行う。2.3.3 節で示したように，$\gamma_{\mathrm{org}} \neq 0$の時は，地動主軸 2 方向入力を扱うことに相当する。ここで，(2-53)式で示したコヒーレンス関数の定義に従えば, 任意の入射角度θにおいてコヒーレンス関数の値は変動するため, Cross PSD 関数の存在領域をコヒーレンス関数の値に応じて可変的に扱う必要がある点に留意する。

図 2-29(a),(b),(c)および(d)では，$\gamma_{\mathrm{org}} = 0, 0.25, 0.75, 1.0$の 4 つのケースに対して，$\theta$の変動に対する柱頭縁応力の標準偏差の最大値を図示した。ここで建物モデルは，スパン長$L_1 = 15.0\mathrm{m}$，$L_2 = 25.0\mathrm{m}$のものを対象とする。図 2-29(a)において，$\gamma_{\mathrm{org}} = 0$の場合は，地動主軸 1 方向入力に相当する。従って，建物軸方向に入力される地動成分間の位相差がないため，完全相関（位相差なし）の入力に対する構造物応答を評価した。また, 相関の影響を考慮しない SRSS 応答についても示した。ここで, $\theta = 0°$または$\theta = 90°$の場合は, 建物軸の 1 方向のみに地動入力が存在することに相当する。建物モデルのスパン長の組み合せに応じて各方向の剛性比が異なるため，完全相関（位相差なし）による応答値と相関の影響を考慮しない SRSS 応答値の差には建物モデルにより異なる。例えば，前節の結果に従えば, 正方な平面形を有する建物モデルの場合は, 相関を考慮した完全相関（位相差なし）は SRSS 応答に対して 1.41 倍の応答増加が生じる。

図 2-29 (b)~(d)では, 地動主軸 2 方向入力を考慮した$\gamma_{\mathrm{org}} = 0.25, 0.75, 1.0$に対する解析結果をそれぞれ示している。これらを比較すれば，γ_{org}の値が大きくなると，最悪な位相差を考慮した極限応答と SRSS 応答との差異が小さくなっていることが確認できる。これは, 図 2-20 で示したように, γ_{org}が大きくなると，コヒーレンス関数が減少し，相関性が弱くなる傾向にあることが直接的な原因であると考えられる。例えば，γ_{org}が 1 の場合は，いずれの角度で入力したとしても，建物軸方向に入力される地動成分間に相関関係はなく，無相関となる。従って，図 2-29 (d)において極限外乱応答と SRSS 応答が完全に一致しているのは多成分入力地震動の成分間の相関性による応答の増分がないことに起因する。また，$\gamma_{\mathrm{org}} = 0.25$および$\gamma_{\mathrm{org}} = 0.75$では最悪な相関性を考慮した極限応答が最大となる入射角が存在することが確認できる。最悪な入射角は建物モデル（＝各方向の剛性比）やγ_{org}に依存して変化すると考えられる。さらに，$\theta = 0°$または$\theta = 90°$の時に，極限外乱応答と SRSS 応答が一致するのは，Penzien-Watabe モデルにおいて，地動主軸および弱軸方向の地動成分は互いに無相関であるという仮定によるものである。

一般的な構造設計において水平 2 方向入力といった地震動の多次元性を考慮する際には, 図 2-29(a)に示すような地動主軸 1 方向入力に相当するものを扱うことがある（例えば 45 度方向入力など）。しかしながら，Penzien-Watabe モデルによる地動主軸の存在を考慮したうえで，地動主軸 2 方向入力を扱った詳細な検討が行われることは稀であると考えられる。そこで，表 2-4 では，地動主軸 2 方向入力において, 入射角に関するパラメトリック解析から得られた最悪な入射角における極限応答に関してγ_{org}の変化に対する極限応答の変化をいくつかのγ_{org}についてまとめた。表 2-4 の結果から，地動主軸 2 方向入力において，最悪な位相差を有する極限外乱に対する極限応答が最大となるγ_{org}が非零である場合には, 最悪な入射角における最悪な位相差を考慮したが$\gamma_{\mathrm{org}} = 0$とした地動主軸 1 方

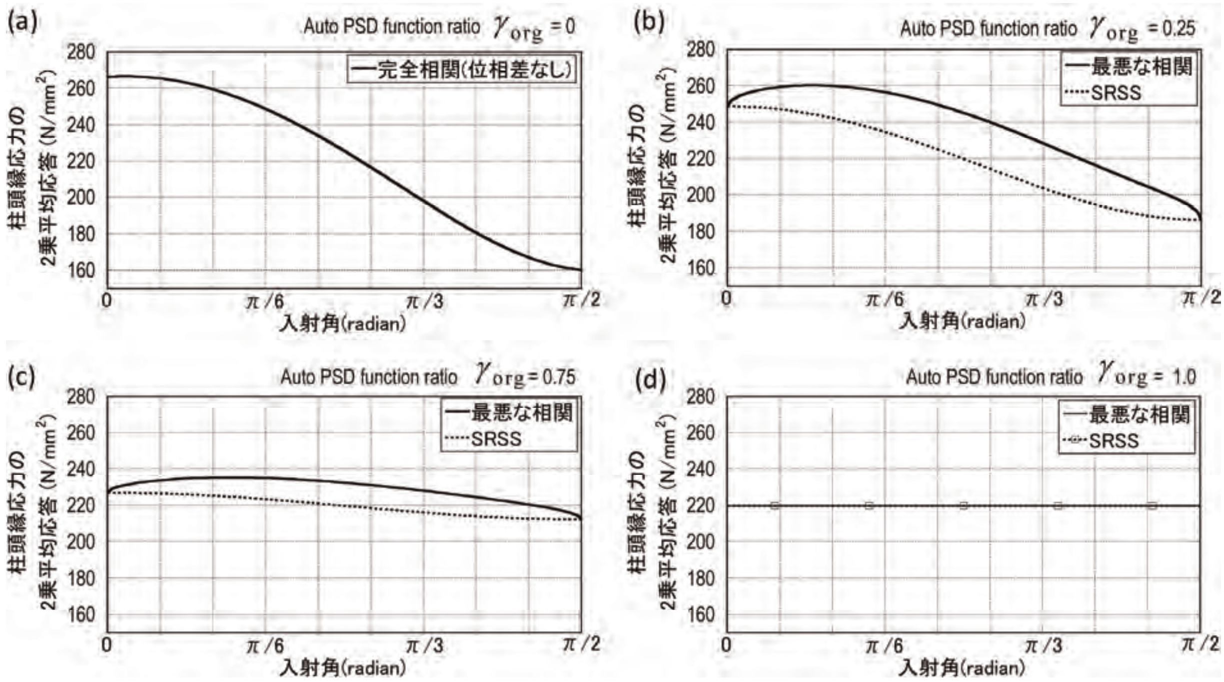


図2-29 地動主軸2方向入力における入射角度の変動に対する柱頭縁応力の標準偏差の最大値

(a) $\gamma_{org}=0$, (b) $\gamma_{org}=0.25$, (c) $\gamma_{org}=0.75$, (d) $\gamma_{org}=1$

表2-4 γ_{org}の変化による極限応答と最悪な入射角の比較

γ_{org}	完全相関: 位相差なし (地動主軸1方向入力)	入射角[degree]
0	266.6	0
	極限応答 (地動主軸2方向入力)	入射角[degree]
0.03	273.3	33
0.05	272.2	32
0.10	269.2	31
0.15	265.6	32

向入力を上回ることが確認できる。このことから，本極限外乱理論を適用することで従来の評価手法では想定し得なかった応答上限値を見出すことが可能であることを示している。

2.7.5 極限外乱に対する応答と任意の入力に対する応答の比較

本節では，水平 2 方向同時入力地震動を受ける立体骨組モデル($L_1=15.0\mathrm{m}$， $L_2=25.0\mathrm{m}$)を対象とし, 前節で得られた最悪な組み合せとなる多成分模擬入力地震動の時刻歴加速度波形を見出すことを試みる。2.6 節で記述した方法は，乱数を用いるモンテカルロシミュレーション(MCS)に基づくため，同じ Auto PSD 関数を有していたとしても，様々な波形がランダムに生成される。当然ながら，

このようにランダムに生成される地震動群に対して応答値には不確定性が介在し, 各地震動に対する応答値は大きなばらつきを有する。従って，地震動群の中から応答を最大化するような入力波の組み合せを多数の時刻歴応答解析により確認する操作が必要である。

まず，地動入力の 1 成分を(2-65)式で与えて，それに対して最悪な Cross PSD 関数(例えば図 2-28 のように得られる)から算定した位相角の経時変化を用いて最悪な相関性を有する地動入力の 1 成分を生成する。このように生成された多成分地震動群を極限外乱群と称することとする。ここで比較のために，前述の(2-65)式において得られた地動入力 1 成分に対して，他方の地動成分をランダムに生成する。このように生成された多成分地震動群をランダム位相入力群と称することとする。極限外乱群とランダム位相入力群では，1 方向の成分は等しいが，もう一つの他方の成分がそれぞれ異なるプロセスで生成されている点に違いがある。これらの 2 つの異なる多成分入力地震動の組み合せに対してそれぞれ柱頭縁応力に関する時刻歴応答解析を行い, 得られた応答の最大値の比較を行ったものが図 2-30 である。図 2-30(a)は，極限外乱群に対する応答とランダム位相入力群に対する応答の分布図であり，図中に記された $\sigma_{\mathrm{cri}} / \sigma_{\mathrm{random}}$ で表わされる線は，極限外乱群に対する応答とランダム入力外乱群に対する応答の比率を示したものである。$\sigma_{\mathrm{cri}} / \sigma_{\mathrm{random}}$ が 1 を上回る領域にプロットがされていることは, ある任意の 1 方向地動成分に対して極限外乱群ではより危険な応答となることを意味する。さらに，図 2-30(b)および(c)は，それぞれの外乱群に対する応答分布のヒストグラムを図示したもので, これらを比較しても明らかに極限外乱群のほうが全体的に柱頭縁応力が大きくなる傾向にあることが分かる。しかしながら，乱数に基づく MCS では生成された多成分入力地震動に対する応答にばらつきが生じるため, 応答が最大となる外乱の 1 サンプルを得るために多数回の試行が要求されるため効率的ではない一面がある。

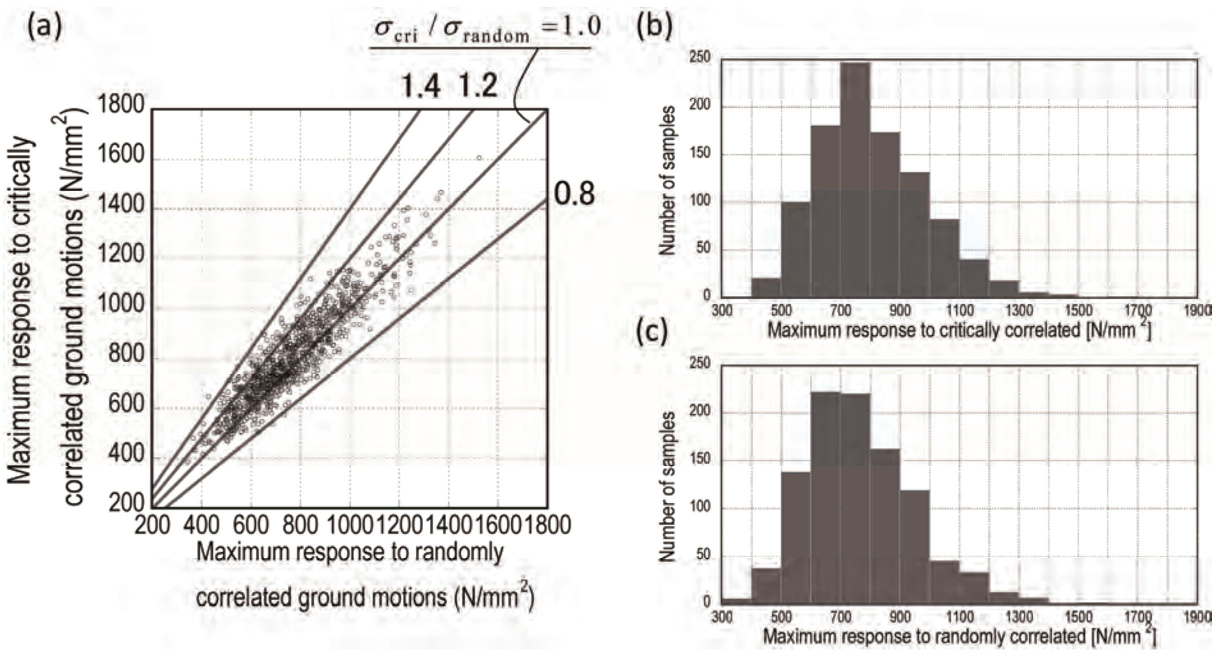


図 2-30 極限外乱群とランダム位相入力群による柱頭縁応力の時刻歴最大応答分布
(a) 極限外乱-ランダム位相の応答分布

図 2-31 は，MCS により得られた結果のうち，応答差が顕著なる 1 例を図示したものである。図 2-31(a)は， X_1 方向の地動成分に対して最悪な相関関係を有するように生成された水平 2 方向地動成分の組み合せである。また，図 2-31(b)は，図 2-31(a)で生成した X_1 方向の地動成分は同一のものを対象にした上で， X_2 方向の地動成分が X_1 方向の地動成分の比例倍で与えられるように生成された水平 2 方向地動成分の組み合せを図示したものである。これらを比較すれば，共に概ね似たような波形形状にあるが，図 2-31(a)では Cross PSD 関数に基づいて位相情報を与えているので，ピークの位置が多少前後することが確認できる。図 2-31(c)では，これらの 2 つの水平 2 方向地動成分の組み合せに対して柱頭縁応力の時刻歴応答を示したもので, 最悪な相関を有するように位相特性を与えた極限外乱は，全く同一の波形となる完全相関波に対して 1.4 倍程度も最大応答値が大きくなっていることが確認できる。

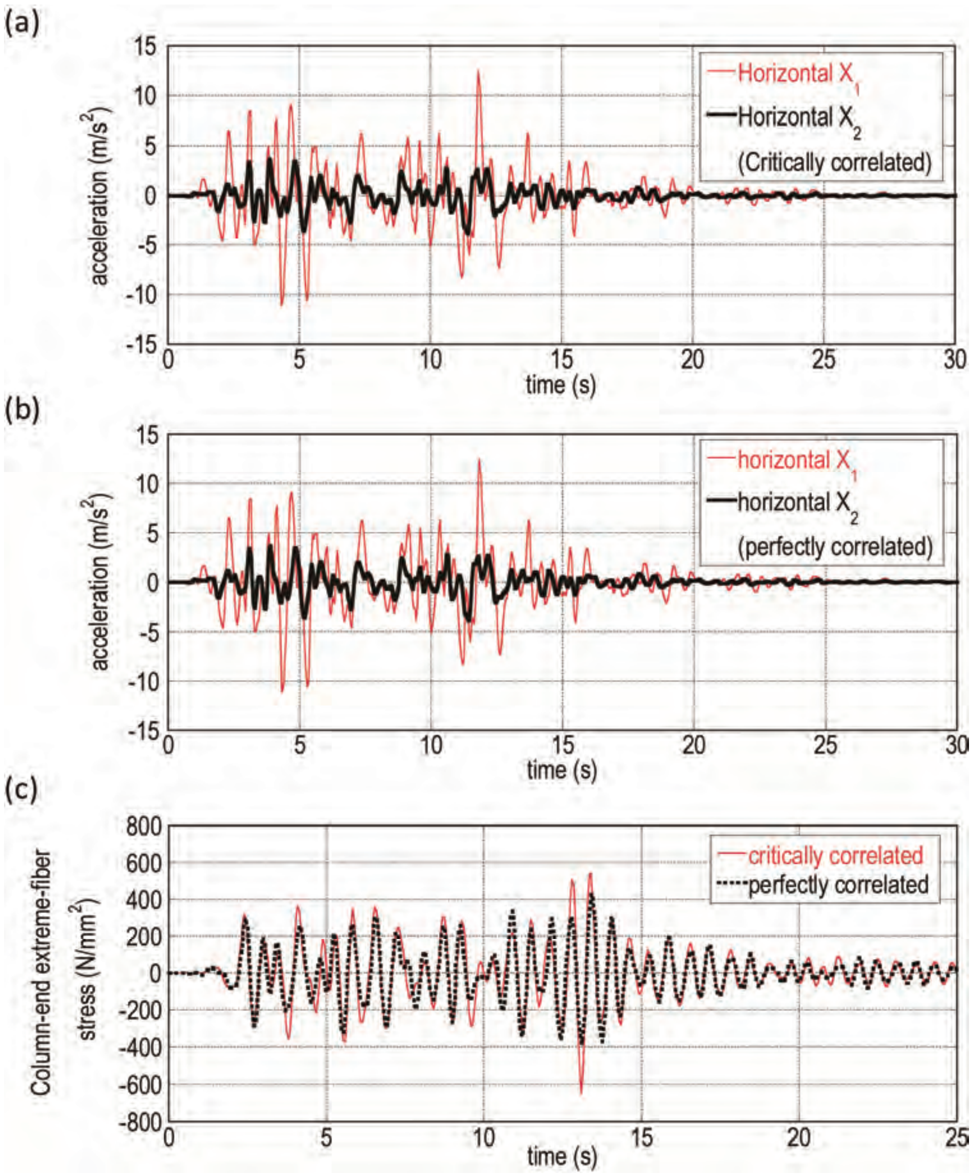


図 2-31 最悪な相関性を有する多成分入力外乱と完全相関波に対する柱頭縁応力の時刻歴応答の比較
(a) 極限外乱, (b) 完全相関波, (c) 柱頭縁応力の時刻歴応答

2.8 結論

入力地動動の 1 方向入力成分のパワースペクトル密度関数(Power spectrum density function :以下 Auto PSD 関数)を既知なものとして与えれば，当該方向に関する応答量の最大値を推定する方法は従来から存在する。しかしながら，地震動に見られるような地動外乱は，本来構造物に対して多方向から同時に入力されるものであり, 多成分入力地震動の互いの位相関係すなわち多成分入力地震動の成分間の相関関係が応答量に対してどのような影響を及ぼすかは複雑であり, 十分明らかとなっているとはいえない。2 方向の地動成分間の相関関係を定量的に表わす指標として，地震動の成分間の相互パワースペクトル密度関数(Cross power spectrum density function: 以下 Cross PSD 関数)がある。ここで時系列波形および $y(t)$ $x(t)$ の成分間の Cross PSD 関数は， $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ の複素共役と $y(t)$ のフーリエ変換 $Y(\omega)$ の積で定義される。しかしながら，Auto PSD 関数は，入力波のフーリエスペクトル振幅ペクトルの絶対値の 2 乗に相当するものであり, 地震動の加速度波形のような時系列波形のフーリエ変換時に得られる複素情報が失われる。従って，2 方向の地動加速度成分の Auto PSD 関数が既知であり，地震動群の周波数特性が与えられたとしても，2 方向地動成分間の Cross PSD 関数を見出すことは一般的に不可能である。本章では，まず種々の記録地震波の水平 2 方向地動加速度の成分間のコヒーレンスに関する分析を実施した上で，多成分入力地震動が有する相関性を明らかにした。これらの分析に基づいて構造物にとって応答が最も増大する最悪な多成分入力地震動の成分間の相関性を明らかにする極限外乱問題を提案し，その解法を定式化した。本章により得られた結論は以下のようにまとめられる。

1) 記録地震波の成分間の Cross PSD 関数とコヒーレンスに関する分析

異なる 2 つの時系列波形の相関関係の定義について整理した上で, 代表的な記録地震波やその他 4 つのカテゴリーに分類された 18 波 36 成分について種々の記録地震波の水平 2 方向成分間の Cross PSD 関数およびコヒーレンス関数を分析した。相関係数は，時刻歴波形の形状の相似形を直感的に理解できる利点はある。さらにコヒーレンス関数を分析することは，水平 2 方向成分間で互いに位相差を有し波形の相似形が見られない場合でも, 周波数領域における相関性の度合いを測ることが可能となる。記録地震波に対する分析結果から，震源から観測点までの距離が比較的近く，サイトの地盤条件が岩盤である場合では，特に相関性が強い波が多く観測されていることが明らかとなった。これは震源からの伝播経路が短いことや, 岩盤地盤により地盤の非線形性の影響を受けにくいことなどの原因が考えられる。水平 2 方向の地動成分間の相関係数は高々0.3 程度であるが，コヒーレンス関数を分析することにより入力が卓越する振動数領域において強い相関性を有するものが多く観測されており, 多成分同時入力地震動における入力の相関性が構造物に及ぼす影響を考慮する設計法の必要性を明らかにした。

2) 多成分入力地震動の相関関係に関する極限外乱問題の提案

非定常性を考慮した入力地震動モデルとして包絡関数 $c(t)$ と平均 0 の定常ガウス確率過程に従う確率変数 $w(t)$ の積で与えられる確率論に基づく非定常入力地震動モデルを採用した上で，水平 2 方向同時入力地震動の成分間の相関関係が応答に及ぼす影響を考慮し, 構造物にとって応答が増大する最悪な入力の相関関係を与える Cross PSD 関数を見出す極限外乱問題を提案した。本極限外乱におけ

る評価関数は，水平 2 方向同時入力の影響を受ける柱頭縁応力の 2 乗平均応答とした。各方向の地動外乱群の周波数特性をそれぞれの加速度成分の Auto PSD 関数により規定したもとで，2 乗平均応答における入力の相関が及ぼす影響項が入力加速度成分の Cross PSD 関数の実部(=コスペクトル)および虚部(クオドスペクトル)を独立変数とみなすことが可能であるという定式化を示した。

3) 拡張 Penzien-Watabe モデルによるコヒーレンスの変動入力モデルの提案

水平 2 方向同時入力問題を扱う上で，地動主軸の存在を仮定している Penzien-Watabe モデルを拡張した拡張 Penzien-Watabe モデルを提案し，これを本極限外乱問題に適用した。本入力モデルでは，地動主軸方向における地震動の PSD 関数 $S_{z1}(\omega)$ と $S_{z2}(\omega)$ を規定し，地動主軸と建物軸のなす角 θ を一つの変数とみなす。$S_{z1}(\omega)$ に対する $S_{z2}(\omega)$ の比を γ_{org} とすれば，建物軸に入力される地動成分は，γ_{org} と θ の関数で表わされ，これらの地動成分間のコヒーレンス関数も γ_{org} と θ の陽な関数である。コヒーレンス関数は，Cross PSD 関数と Auto PSD 関数の比率で定義されており，本入力モデルを扱う場合では，対象とする応答量の相関に関する項を評価する際にコヒーレンス関数を Cross PSD 関数の制約条件に付加した。

4) 多成分入力地震動における成分間の最悪な相関性を見出す極限外乱問題に対する解法の提示

多成分入力地震動の影響を考慮した既存の応答評価手法として，SRSS 法 (Square Root of Sum of Squares）および CQC3 法（Complete Quadratic Combination）などが知られている。しかしながら，前者は各方向の入力と応答の関係を統計的に独立なものとみなし，多成分入力の相関関係を十分に考慮した評価法とは言い難い。また，後者は，水平 2 方向入力を扱う問題などを対象として提唱されているが，そもそも CQC3 法は応答スペクトル法を用いた簡易的なものであり，各入力成分間の相関関係を十分に考慮しているとは言えない。一方，本極限外乱問題では，対象とする応答量を最大化する多成分入力地震動の相関関係をコスペクトルおよびクオドスペクトルを閉形表現を明らかにし，入力地震動の成分間の相関性が応答に及ぼす影響について理論的アプローチを展開した。具体的には，時間と振動数の関数となっている相関に関する項を，時間ステップごとに振動数域での最大化を行うことによって最悪な Cross PSD 関数を求める。振動数領域での最大化における被積分項は，未知変数である Cross PSD 関数の実部および虚部が構造物特性を表す確定値と互いに内積の関係にあることを明らかにし，これを最大化する方法を提示している。これにより時々刻々と変化する多成分入力地震動の最悪な相関関係を厳密に見出すことが可能である。

5) 1 層 1 スパン立体骨組の数値解析例による極限外乱理論の検証

レベル 2 安全限界スペクトルに相当する Auto PSD 関数を有する地動外乱群を対象とし，応答が増大する最悪な入力の相関関係を与える Cross PSD 関数を見出したうえで，1 層 1 スパン立体骨組における柱頭縁応力の標準偏差を解析した。多成分入力地震動に対する応答評価法としてよく用いられる SRSS 法による応答値と本極限外乱により得られた極限応答を比較することで，本極限外乱問題に基づく極限応答は，SRSS 応答に対してより危険側に評価することが可能であることを確認し，本極限外乱法の有用性を提示した。

立体骨組のスパン長を連続的に変動させることにより，建物モデルの各方向の動特性の変動が極限応答に及ぼす影響に関する解析を行った。入力の相関関係の影響の程度は，構造物モデルの動特性に大きく依存する。相関の影響が顕著となるのは，振動方向の各固有円振動数が近接する場合であり，

最大で SRSS 法に対して 1.4 倍となることを明らかにした。また，入力地動成分の相関関係を考慮可能なものとして知られている CQC3 法における応答評価の値は，建物各方向の固有周期が近接する場合では，最悪な相関を考慮した極限外乱理論に基づく応答評価の値にほぼ一致したが，それ以外では相関関係を考慮できない SRSS 法による応答評価の値に近接していくことが明らかになった。一方で，本極限外乱法に基づいて評価される応答量は，建物各方向の固有周期の組み合せに拠らず SRSS 法および CQC3 法による評価値を上回っており，本極限外乱法による応答評価法では既往の応答評価手法では評価し得なかった多成分入力地震動の最悪な相関関係を考慮することが可能であることを明らかにした。

6) <u>**地動主軸 1 方向入力と地動主軸 2 方向入力の比較**</u>

Penzien-Watabe モデルにおいて，建物軸と地動主軸それぞれにおける地動成分の Auto PSD 関数の規定方法ならびにコヒーレンス関数の設定方法により地動主軸1方向入力問題と地動主軸2方向入力問題の違いを明確にし，それぞれの問題に対する数値解析を実施した。本極限外乱理論における地動主軸 2 方向入力問題では, 建物軸方向に入力される地動成分間の相関性はコヒーレンス関数により規定されコヒーレンス値が一般に 1 を下回るため, 地動主軸 1 方向入力問題に比べて顕著な応答増加が見られない。地動主軸 1 方向入力問題において入射角をパラメトリックに変化させることにより，建物モデルに応じて最悪な入射角を見出すことが可能であり，Auto PSD 関数の比率を固定した従来の方法に比べて応答がより増大する極限外乱を得ることが可能であることを明らかにした。

参考文献

Athanatopoulou AM. (2005) "Critical orientation of three correlated seismic components." *Eng. Struct.*, **27**: pp301-312.

Abbas AM, Manohar CS. (2002a) "Investigations into critical earthquake load models within deterministic and probabilistic frameworks. "*Earthq. Eng. Struct. Dyn.* , **31**(4), pp813-832.

Abbas AM, Manohar CS. (2002b)"Critical spatially-varying earthquake load models for extended structures." *J Struct. Eng. (JoSE, India)* , **29**(1), pp39-52.

Abbas AM, Manohar CS. (2007) "Reliability-based vector nonstationary random critical earthquake excitations for parametrically excited systems." *Struct. Safety* ,**29**, pp32–48.

Clough RW, Penzien J. (1993). *Dynamics of Structures*, second edition, Prentice Hall.

Drenick RF. (1970). "Model-free design of aseismic structures." *J Eng. Mech. Div*; ASCE: **96**(EM4), pp483-493.

Fujita K, Yoshitomi S, Tsuji M, Takewaki I. (2008). "Critical cross-correlation function of horizontal and vertical ground motions for uplift of rigid block." *Eng. Struct.*; **30**(5): pp1199-1213.

Fujita. K., Takewaki I. (2010), "Critical correlation of bi-directional horizontal ground motions." *Eng. Struct.*; **32**(1): pp 262-272.

Ghersi A, Rossi PP. (2001). "Influence of bi-directional ground motions on the inelastic response of one-storey in-plan irregular systems." *Eng. Struct.*; **23**(6): pp579-591.

星谷勝(1974)，確率論手法による振動解析，鹿島出版会.

Iyengar RN, Manohar CS. (1987). "Nonstationary random critical seismic excitations." *J Eng. Mech.*; ASCE:

113(4), pp529-541.

Lopez OA, Chopra AK, Hernandez JJ. (2000). "Critical response of structures to multicomponent earthquake excitation." *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*; **29**: pp1759–1778.

Manohar CS, Sarkar A. (1995). "Critical earthquake input power spectral density function models for engineering structures." *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*; **24**: pp1549-1566.

Menun C, Der Kiureghian A. (1998). "A replacement for the 30%, 40%, and SRSS rules for multicomponent seismic analysis. "*Earthq. Spectra*; **14**(1): pp153-163.

Nigam NC. (1983). *Introduction to Random Vibrations*; MIT Press, London.

日本建築学会第(1996) 第2回多次元入力地震動と構造物多次元挙動に関するシンポジウム-主に兵庫県南部地震の地震被害に学ぶ.

日本建築学会(1998) 多次元入力地震動と構造物の応答.

Penzien J., Watabe M. (1975). "Characteristics of 3-dimensional earthquake ground motion." *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*; **3**: pp365–374.

Rigato A.B, Medina RA. (2007). "Influence of angle of incidence on seismic demands for inelastic single-storey structures subjected to bi-directional ground motions." *Eng. Struct.*; **29**(10): pp2593-2601.

Sarkar A, Manohar CS. (1996). "Critical cross power spectral density functions and the highest response of multi-supported structures subjected to multi-component earthquake excitations." *Earthq. Eng. Struct. Dyn*; **25**: pp303-315.

Sarkar A, Manohar CS. (1998). "Critical seismic vector random excitations for multiply supported structures." *J Sound and Vibration*; **212**(3): pp525-546.

Shinozuka, M. (1970). "Maximum structural response to seismic excitation." *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, **96**(EM5), pp729-738.

Smeby W., Der Kiureghian. (1985). A. "Modal combination rules for multicomponent earthquake excitation." *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*; **13**: pp1-12.

Strasser, F.O., Bommer, J.J. (2009)."Review: Strong ground motions - Have we seen the worst?", *Bulletin of the Seismic Society of America*; 99 (5): pp2613-2637.

Takewaki I. (2001) "A new method for nonstationary random critical excitation." *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*; **30**(4): pp519-535.

Takewaki I. (2002). "Seismic critical excitation method for robust design: A review." *J Struct. Eng.*, ASCE; **128**(5): pp665-672.

Takewaki I. (2004). "Critical envelope functions for non-stationary random earthquake input." *Computers & Structures*; **82**(20-21): pp1671-1683.

Takewaki I. (2004). "Bound of earthquake input energy." *J Struct Engrg* ASCE; **30**(9): pp1289-1297.

Takewaki I. (2006). "Probabilistic critical excitation method for earthquake energy input rate." *J Engrg Mech* ASCE; **132**(9): pp990-1000.

Takewaki I. (2007) *Critical Excitation Methods in Earthquake Engineering*, Elsevier Science, Oxford.

Wilson, E. L., Der Kiureghian, A., Bayo, E. P. (1981) "A replacement of the SRSS method in seismic analysis." *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **9**, pp187–194.

第 3 章　水平上下地震動の振動数特性の最悪な組み合せを考慮した極限外乱の特性

3.1　多成分入力地震動の相関性に関する極限外乱理論の拡張と適用性

第 2 章では, 水平 2 方向同時入力地震動における地動成分間の相関関係に関する極限外乱問題を提示し，問題の定式化および解法アルゴリズムを示した。第 2 章で展開した極限外乱問題では，地動加速度成分のパワースペクトル密度関数(以下 Auto PSD 関数)を既知なものとして指定されると仮定していた。具体的には，第 2 章で扱った Auto PSD 関数は，過去の地震規模を包絡するように策定された限界耐力算定に用いられる安全限界スペクトルである。しかしながら，地震工学における地震動のデータベースの蓄積はいまだ不十分であり, 地震動特性のばらつきやこれまでに想定し得なかった事態が観測され，これまでの想定外乱の概念を見直さざるを得ないことが度々生じる。例えば，今後発生が懸念される長周期地震動やパルス性の強い外乱等に関しては, 通常の耐震設計で用いられている Auto PSD 関数では想定することが困難である。従って，第 2 章で展開した指定された Auto PSD 関数の下での最悪な相関性を見出す極限外乱法においては想定する地震動の振動数特性が限定されたものであるため, 対象とする構造物に対して最悪なシナリオを生じさせる極限地震動を見出す上では地震動の振動数特性の変動を考慮する必要性がある。

そこで本章では, 対象とする入力地震動モデルにおける Auto PSD 関数を特徴づけるパラメター(例えば，振動数特性や振幅レベル)の変動を考慮し，第 2 章で展開した極限外乱理論の拡張を行う。本章で扱う多成分入力地震動は，水平上下同時入力地震動とし，3.2 節では，水平上下同時入力地震動を受ける平面骨組の梁端部曲げモーメント応答に関する極限外乱問題を示す。また，3.3 節および 3.4 節では，任意の振動数特性を有すると仮定したモデルフリー地震動を定義し，最悪な振動数特性の組み合せを解析的に導く方法を提示する。

さらに，3.5 節では本極限外乱理論を適用して最悪な振動数特性の組み合せを見出した上で，確定的な入力に対する最悪な時刻歴波形の導出方法を提示する。これは，記録地震波の 1 成分が与えられた下で対象とする構造物の多次元挙動において最悪なシナリオを生じさせる極限地震動(他方向の入力)の時刻歴成分を見出すものであり，本極限外乱理論を実用的に適用する方法を示すことを目的としている。

3.2　水平上下同時入力地震動に対する極限外乱問題

本節では，水平上下同時入力地震動に対する極限外乱問題を展開し，同時入力地震動の多成分間の最悪な相関関係に関する特性を明らかにする(藤田 2008b, 2009)。

3.2.1 水平上下同時入力地震動を受ける平面骨組の梁端曲げモーメント応答の評価

本章で扱う建物モデルは，図 3-1 に示す 1 層 1 スパン平面骨組とし，柱は角形鋼管とし，梁は H 型鋼とする。図 3-1 において，H，L はそれぞれ層高さ，梁スパン長を表す。また，E，I_b および I_c は，柱および梁の鋼材のヤング係数，梁および柱の断面二次モーメントを表す。このような平面骨組が水平上下同時入力地震動を受けると，梁端部では，水平方向振動および鉛直方向振動に起因する各方向成分の曲げモーメントによる影響が相互に関連し，応答が増幅される可能性がある。従って，対象とする評価関数は，水平・上下入力に対する梁端部の曲げモーメント応答の和の 2 乗平均応答とす

る。入力地動外乱モデルは，第 2 章と同様なものとして扱い，次式で定義する。

$$\ddot{u}_g(t) = c_u(t) w_u(t) \tag{3-1}$$

$$\ddot{v}_g(t) = c_v(t) w_v(t) \tag{3-2}$$

ここに $c_u(t)$，$c_v(t)$ は, 水平および鉛直方向地動成分の振幅調整を行う包絡関数である。また，$w_u(t)$，$w_v(t)$ は，定常ガウス確率過程に従う確率変数である。$c_u(t)$ および $c_v(t)$ を操作することにより水平動と鉛直動の時間差入力を考慮することが可能である。第 2 章では，各方向の Auto PSD 関数が安全限界スペクトルから与えられるものとして扱ってきたが, 本章では各方向の地動成分における様々な振動数特性の組み合せを考慮するため，Auto PSD 関数をパラメターとする地動外乱モデルを適用する。このような外乱モデルをモデルフリー地震動と呼称する。モデルフリー地震動の定義については後述する。

各方向の地動入力に対する応答は, 各方向を静的荷重変位関係が等価となるような 1 質点系に置換した上で，水平変位 $u(t)$ および鉛直変位 $v(t)$ の最大値から各方向の最大曲げモーメント応答として評価する。1 層 1 スパン平面骨組の等価 1 質点系への置換における水平および鉛直方向の各剛性は次のように表わすことができる。

$$k_u = \frac{12EI_c\{1+6(I_b/I_c)\cdot(H/L)\}}{H^3\{2+3(I_b/I_c)\cdot(H/L)\}} \tag{3-3a}$$

$$k_v = \frac{96EI_b\{2+(I_b/I_c)\cdot(H/L)\}}{L^3\{1+2(I_b/I_c)\cdot(H/L)\}} \tag{3-3b}$$

(3-3a)式については，第 2 章で同様な導出を行っている。ここでは(3-3b)式で表わされる鉛直方向剛性の導出について記す。鉛直方向については，モデルの対称性を考慮し，図 3-2 のように考える。点 C における鉛直方向剛性および外力は，モデルの対称性によりそれぞれ $(1/2)k_v$，$(1/2)P_v$ となり，柱の伸縮を無視すれば，梁中央点での鉛直方向変位平面骨組の鉛直方向 v を用いて鉛直方向剛性 k_v は，次式で与えられる。

$$k_v = P_v / v \tag{3-4}$$

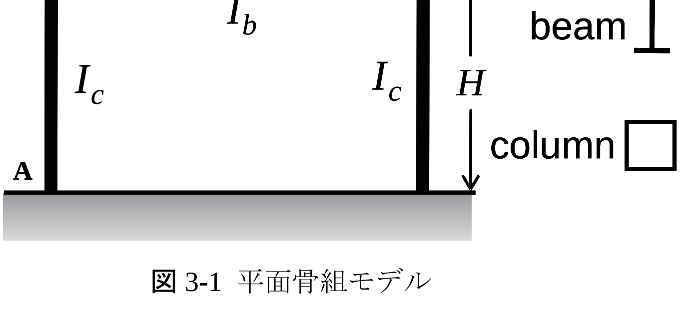


図 3-1 平面骨組モデル

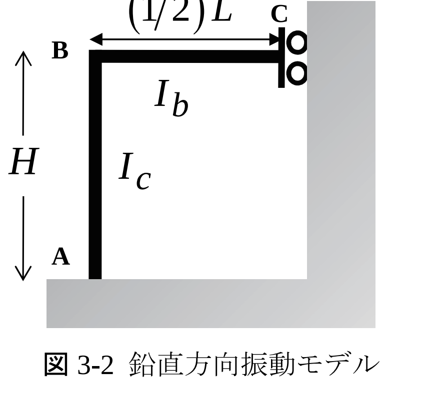


図 3-2 鉛直方向振動モデル

また，図 3-2 において，梁中央鉛直変位 v は，梁の BC 部の部材角 R_{BC} を用いて $v=(1/2)L\cdot R_{BC}$ となるので，鉛直方向剛性 k_v は次式のようにも表わすことができる。

$$k_v = 2P_v / (LR_{BC}) \tag{3-5}$$

梁中央に鉛直方向外力 P_v が作用した時に生じる部材 BC の B 端側曲げモーメント M_{BC}^{v} は次式となる。

$$M_{BC}^{v} = (4EI_b / L)(2\theta_B - 3R_{BC}) \tag{3-6}$$

さらに，節点 B でのモーメントの釣り合いを考慮することにより，θ_B および R_{BC} の関係式は(3-7)式となる。

$$\theta_B = \frac{3(I_b/I_c)\cdot(H/L)}{1+2(I_b/I_c)\cdot(H/L)} R_{BC} \tag{3-7}$$

部材 BC の層方程式と(3-7)式から θ_B を消去すれば，部材角 R_{BC} は(3-8)式となる。

$$R_{BC} = \frac{P_v L^3 \{1+2(I_b/I_c)\cdot(H/L)\}}{48EI_b \{2+(I_b/I_c)\cdot(H/L)\}} \tag{3-8}$$

このとき，鉛直方向剛性 k_v は，(3-8)式を(3-5)式に代入することにより(3-4)式として得られる。

また, 各方向の曲げモーメント $M_u(t)$ および $M_v(t)$ は, 水平方向変位 $u(t)$ および鉛直方向変位 $v(t)$ の線形関数であり，次式で求められる。(3-9)式の導出については第 2 章と同様であるので，ここでは省略する。一方, (3-10)式については, (3-6)式に(3-7)式および(3-8)式を代入することにより得られる。

$$M_u(t) = \frac{18EI_b}{HL\{2+3(I_b/I_c)\cdot(H/L)\}} u(t) \tag{3-9}$$

$$M_v(t) = \frac{24EI_b}{L^2\{1+2(I_b/I_c)\cdot(H/L)\}} v(t) \tag{3-10}$$

(3-9)式および(3-10)式において $u(t)$ および $v(t)$ は 1 質点系の時刻歴応答で与えられるため，各方向の単位衝撃応答関数を用いて次式で表わすことができる。

$$u(t) = \int_0^t \{-\ddot{u}_g(\tau)\} g_u(t-\tau) d\tau \tag{3-11}$$

$$v(t) = \int_0^t \{-\ddot{v}_g(\tau)\} g_v(t-\tau) d\tau \tag{3-12}$$

以上より, 本章における極限外乱問題における評価関数を構成する水平および鉛直方向の梁端部曲げモーメント $M_u(t)$ および $M_v(t)$ は次式で与えられる。

$$M_u(t) = A_{Mu} \int_0^t \{-\ddot{u}_g(\tau)\} g_u(t-\tau) d\tau \tag{3-13}$$

$$M_v(t) = A_{Mu} \int_0^t \{-\ddot{v}_g(\tau)\} g_v(t-\tau) d\tau \tag{3-14}$$

ここに A_{Mu} および A_{Mv} は，(3-9)式，(3-10)式における各方向変位 $u(t)$，$v(t)$ に対する係数であり，部材寸法，スパン長が与えられれば定数として与えられる。

3.2.2　水平上下同時入力地震動の相関関係に関する極限外乱問題

前節より水平上下同時入力地震動を受ける1層1スパン平面骨組モデルの梁端部の各方向曲げモーメント応答を定式化した。本章における極限外乱問題では，水平および鉛直方向入力による梁端部の曲げモーメント応答の和の 2 乗平均応答を評価関数とする。水平上下同時入力時の梁端部の曲げモーメントは(3-13)式と(3-14)式の和で表わされ，次式となる。

$$f(t) = M_u(t) + M_v(t) \tag{3-15}$$

曲げモーメント和の 2 乗平均応答を展開すれば次式となる。

$$\begin{aligned} E\left[f(t_1) f(t_2)\right] &= E\left[M_u(t_1) M_u(t_2)\right] + E\left[M_u(t_1) M_v(t_2)\right] \\ &\quad + E\left[M_v(t_1) M_u(t_2)\right] + E\left[M_v(t_1) M_v(t_2)\right] \end{aligned} \tag{3-16}$$

ここに，$E[\quad]$はアンサンブル平均を表し，(3-16)式の各項は，水平 2 方向同時入力問題と同様に後述のように展開することができる。

まず，(3-16)式における第 1 項，すなわち水平方向入力に対する梁端部曲げモーメント応答の自己相関関数の項は，振動数領域における定式化により次のように展開できる。以下に記す定式化は，基本的に第 2 章とほぼ同様である。

$$E\left[M_u(t)^2\right] = A_{Mu}{}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[B_c(t;\omega)^2 + B_s(t;\omega)^2\right] S_{uu}(\omega) d\omega \tag{3-17}$$

ここに

$$B_c(t;\omega) = \int_0^t c_u(\tau) g_u(t-\tau) \cos\omega\tau d\tau \tag{3-18}$$

$$B_s(t;\omega) = \int_0^t c_u(\tau) g_u(t-\tau) \sin\omega\tau d\tau \tag{3-19}$$

また，(3-16)式における第 4 項，すなわち鉛直方向入力に対する梁端部曲げモーメント応答の自己相関関数の項は，前述と同様の定式化により次のように表わされる。

$$E\left[M_v(t)^2\right] = A_{Mu}{}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[C_c(t;\omega)^2 + C_s(t;\omega)^2\right] S_{vv}(\omega) d\omega \tag{3-20}$$

ここに

$$C_c(t;\omega) = \int_0^t c_v(\tau) g_v(t-\tau) \cos\omega\tau d\tau \tag{3-21}$$

$$C_s(t;\omega) = \int_0^t c_v(\tau) g_v(t-\tau) \sin\omega\tau d\tau \tag{3-22}$$

最後に，(3-17)式における第 2 項および第 3 項，すなわち水平および鉛直方向入力に対する梁端部曲げモーメント応答の相互相関関数の項は，水平方向および鉛直方向入力の確率変数 $w_u(t)$ および $w_v(t)$ の Cross PSD 関数 $S_{uv}(\omega)$ の実部 $C_{uv}(t)$ および虚部 $Q_{uv}(t)$ を用いて次のように表わされる。

$$\begin{aligned} &E\left[M_u(t)M_v(t)\right]+E\left[M_v(t)M_u(t)\right] \\ &=2A_{M_u}A_{M_v}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f_1(t;\omega)C_{uv}(\omega)+f_2(t;\omega)Q_{uv}(\omega)\right\}d\omega \end{aligned} \tag{3-23}$$

ここで

$$f_1(t;\omega)=B_c(t;\omega)C_c(t;\omega)+B_s(t;\omega)C_s(t;\omega) \tag{3-24a}$$

$$f_2(t;\omega)=B_c(t;\omega)C_c(t;\omega)-B_s(t;\omega)C_s(t;\omega) \tag{3-24b}$$

(3-17)式，(3-20)式および(3-23)式より水平上下同時入力地震動を受ける梁端部曲げモーメント応答の 2 乗平均は次のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} &E[\{M_u(t)+M_v(t)\}^2] \\ &=A_{Mu}{}^2\int_{-\infty}^{\infty}\{B_c(t;\omega)^2+B_s(t;\omega)^2\}S_{uu}(\omega)d\omega \\ &\quad+2A_{Mu}A_{Mv}\int_{-\infty}^{\infty}\{f_1(t;\omega)C_{uv}(\omega)+f_2(t;\omega)Q_{uv}(\omega)\}d\omega \\ &\quad+A_{Mv}{}^2\int_{-\infty}^{\infty}\{C_c(t;\omega)^2+C_s(t;\omega)^2\}S_{vv}(\omega)d\omega \end{aligned} \tag{3-25}$$

第 2 章では，各方向の自己相関に関する項は，構造物モデルのパラメターと各方向の Auto PSD 関数が与えられれば既知なものとして扱っていた。一方，様々な振動数特性を有するモデルフリー地震動を対象とする場合は，(3-25)式における第 1 項と第 3 項も入力地震動のパラメターに依存する関数となる点に留意する必要がある。すなわち，(3-25)式の最大化においては，相互相関に関する項だけでなく，自己相関に関する項も検討対象となる。

3.2.3　水平上下同時入力地震動の相関関係に関する極限外乱問題の解法

水平上下同時入力地震動における最悪なコスペクトルおよびクオドスペクトルは, 第 2 章で求められていた（問題は異なるが表現としては同様）。ここでは前章で得られた最悪なコスペクトルおよびクオドスペクトルを用い，(3-25)式で表わされる梁端部曲げモーメント和の 2 乗平均応答の相関に関する項のみを最大化する水平上下同時入力地震動の最悪な Auto PSD 関数の組み合せを見出す。

まず, 水平上下同時入力地震動を受ける構造物の梁端部曲げモーメント応答を最大化する最悪な入力地動成分間の Cross PSD 関数を第 2 章と同様に展開すれば，Cross PSD 関数の実部および虚部はそれぞれ次式で求められる。

$$C_{uv}(\omega)=f_1(t;\omega)\frac{\sqrt{S_{uu}(\omega)S_{vv}(\omega)}}{\sqrt{f_1(t;\omega)^2+f_2(t;\omega)^2}} \tag{3-26}$$

$$Q_{uv}(\omega) = f_2(t;\omega)\frac{\sqrt{S_{uu}(\omega)S_{vv}(\omega)}}{\sqrt{f_1(t;\omega)^2 + f_2(t;\omega)^2}} \tag{3-27}$$

ただし，水平 2 方向同時入力問題とは異なり，Penzien-Watabe モデルに基づいてコヒーレンス関数の制約を受けないため，ここではコヒーレンス値の上限を 1 とする。

(3-26)式および(3-27)式を梁端部曲げモーメント応答の 2 乗平均応答における相関に関する項に代入すれば，次式となる。

$$\begin{aligned} & E\left[M_u(t)M_v(t)\right] + E\left[M_v(t)M_u(t)\right] \\ & = 2A_{Mu}A_{Mv}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{f_1(t;\omega)^2 + f_2(t;\omega)^2}\sqrt{S_{uu}(\omega)S_{vv}(\omega)}d\omega \end{aligned} \tag{3-28}$$

(3-28)式は，最悪な相関関係に対応した相関項となっており，(3-28)式内における振動数に関する積分項では，構造物特性に対応する伝達関数 $\sqrt{f_1(t;\omega)^2 + f_2(t;\omega)^2}$ と，入力地震動特性に対応する Auto PSD 関数の相乗平均 $\sqrt{S_{uu}(\omega)S_{vv}(\omega)}$ が分離した形で得られている。前者は質量や剛性といった構造物の基本特性が与えられれば定まる関数であるのに対して，後者は多成分入力地震動における振動数特性に関する項となる。従って，応答を最大化する最悪な入力外乱特性を決定するためには，$S_{uu}(\omega)$ と $S_{vv}(\omega)$ の相互の関係が重要なファクターである。

3.2.4　規定された Auto PSD 関数に対する極限外乱問題の数値例

本章では，前述したように任意の振動数特性を有する Auto PSD 関数(次節で扱う)を対象とした極

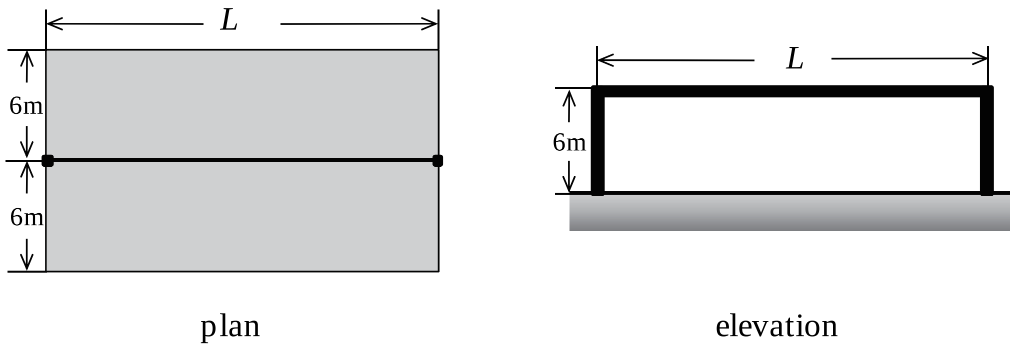


図 3-3 1 層 1 スパン平面骨組構造物モデル

表 3-1　部材パラメター

	柱	梁
断面サイズ[mm]	□-1000×1000×30	H-1200×600×40×32
断面積[mm^2]	1.16×10^5	8.57×10^4
断面 2 次モーメント[mm^4]	1.82×10^{10}	1.99×10^{10}
単位長さ当り質量[kg/m]	911	673

限外乱問題を扱うことを目的としている。Auto PSD 関数の振動数特性を規定しない場合には，最悪な相関性を考慮した梁端部の曲げモーメント応答の 2 乗平均応答における(3-25)式および(3-28)式の $S_{uu}(\omega)$ および $S_{vv}(\omega)$ が変動することに留意する。本項では，次節で扱う任意の Auto PSD 関数の組み合せを考慮した地震動モデルに対する極限外乱の特性と比較するために，第 2 章で扱った安全限界スペクトルに基づく規定された Auto PSD 関数に対する水平上下同時入力を受ける平面骨組の梁端部曲げモーメントに関する極限応答の性状について把握する(藤田，竹脇 (2008b))。

図 3-3 は, 本節で解析対象とする 1 層 1 スパンの平面骨組である。柱は角形鋼管, 梁はH形鋼とし，そのパラメターを表 3-1 に記す。また，鋼材のヤング係数 E は 2.05×10^5 [N/mm^2] とする。解析は弾性解析とする。建物高さは $H=6.0$m で一定とする。振動面に垂直な奥行き方向長さは 6.0m とし，

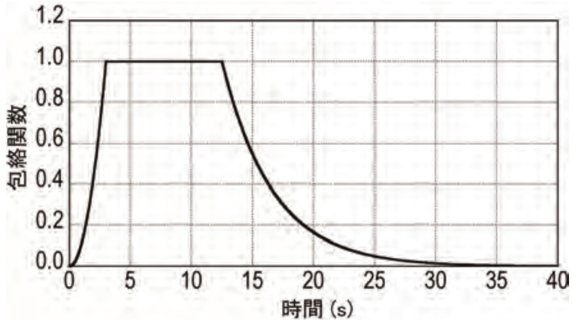


図 3-4 包絡関数

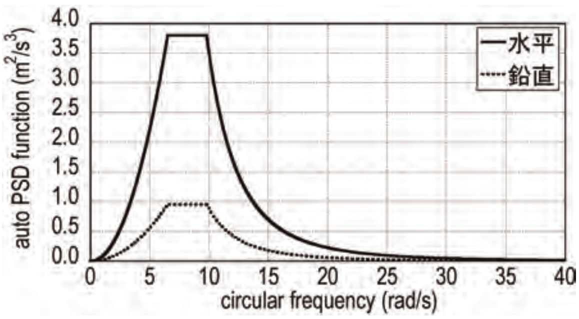


図 3-5 水平および鉛直方向の Auto PSD 関数

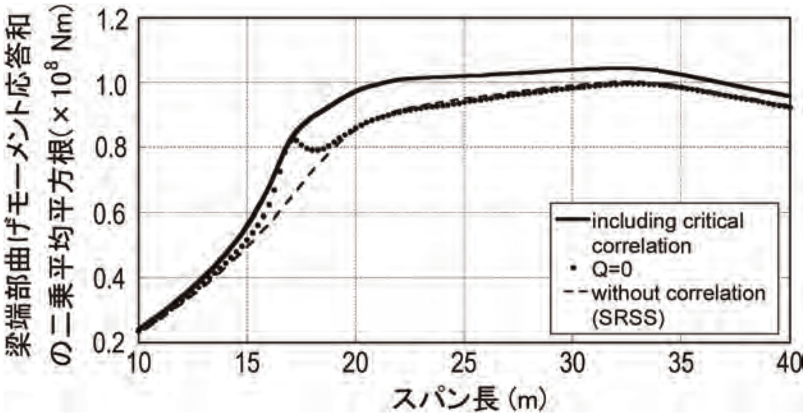


図 3-6 スパン長の変動に対する梁端部曲げモーメント応答和の 2 乗平均平方根の変化

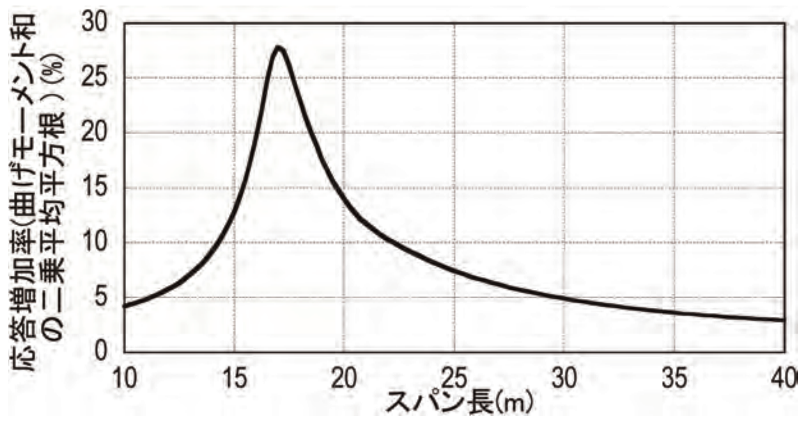


図 3-7 相関を考慮しない SRSS 応答に対する極限応答の応答増加率

床荷重は$600[\mathrm{kg/m^2}]$とする。(3-3a)式および(3-3b)式より，水平および鉛直方向剛性はスパン長Lの関数となっている。本節で扱う数値例では，スパン長の変動による各方向の固有円振動数の組み合せの変化が極限応答に及ぼす影響について検討する。

図 3-4 は，経時特性を与える包絡関数で，第 2 章で扱ったものと同様である。ここでは，水平および鉛直方向ともに図 3-4 で与えられる包絡関数を用いることとする。また，図 3-5 は，本項で扱う非定常入力地震動モデルにおける定常振動成分$w_u(t)$，$w_v(t)$の Auto PSD 関数$S_{uu}(\omega)$と$S_{vv}(\omega)$を図示したものである。いずれも，第 2 章で用いた安全限界スペクトルに相当するものである。ただし，上下動の安全限界スペクトルについては，一般には規定されていないため，ここでは全ての振動数域で水平動の 1/2 の大きさ(Auto PSD 関数の振幅値には 4 倍の差が生じる)を有すると仮定する。

図 3-6 は, スパン長をパラメトリックに変動させた場合の曲げモーメント和の 2 乗平均平方根(≈標準偏差)の最大値を，極限外乱に対する応答，SRSS 評価による応答(=(3-25)式における相関項を考慮しないものに相当)，クオドスペクトルを 0 とした完全相関の場合について比較したものである。

また，図 3-7 は，最悪な Cross PSD 関数を考慮した相関項を含む場合の曲げモーメント和と SRSS 評価による曲げモーメント和との差を SRSS 評価による曲げモーメント和で割った応答の増加率を表す。図 3-7 より，スパン長$L=17.0\mathrm{m}$の付近で応答増加率が最大となっている。ここで，スパン長$L=17.0\mathrm{m}$における水平および鉛直方向の固有周期について着目すれば，水平方向の固有周期は

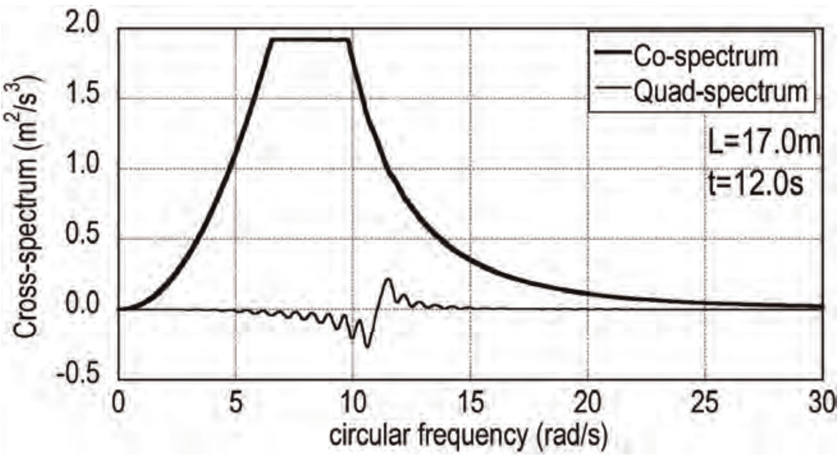


図 3-8 スパン長$L=17.0\mathrm{m}$における最悪な Cross PSD 関数

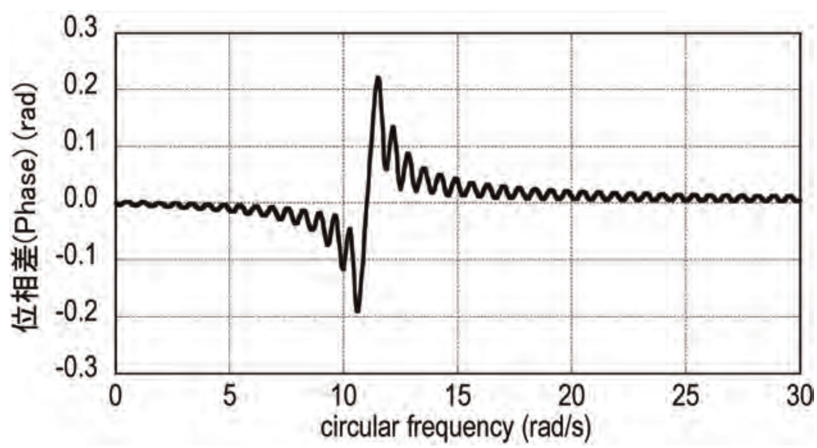


図 3-9 スパン長$L=17.0\mathrm{m}$における最悪な Cross PSD 関数による水平・鉛直方向入力の位相差

$T_h = 0.560s$，上下方向の固有周期は$T_v = 0.563s$であり，各方向の固有周期がほぼ一致している。水平，鉛直方向の固有周期が等しい場合に相関項が最大になるのは，(3-24a)式, (3-24b)式を構成する$B_c(t;\omega)$，$B_s(t;\omega)$，$C_c(t;\omega)$および$C_s(t;\omega)$が近接する固有振動数においてピークとなり，水平および鉛直方向応答の相関が強くなるためである。つまり，相関項では，$B_c(t;\omega)$，$B_s(t;\omega)$と$C_c(t;\omega)$，$C_s(t;\omega)$の積がそれぞれ存在し，水平と鉛直の固有振動数が近接する場合に相関項による影響が顕著になる。

図 3-8 は，スパン長$L = 17.0\mathrm{m}$，2 乗平均応答を定義する時刻$t = 12.0s$における最悪な Cross PSD 関数のコスペクトルおよびクオドスペクトルをそれぞれ図示したものである。図より，クオドスペクトルは，コスペクトルに比べてかなり相対的に振幅レベルが小さい。

また，図 3-9 では，最悪な Cross PSD 関数から定まる水平および鉛直方向入力の位相差を図示したもので，各方向の固有円振動数付近で反転していることが確認できるが，位相差は小さい。従って，スパン長$L = 17.0\mathrm{m}$のように各方向の固有円振動数が極めて近接する場合には，各方向の入力の位相角がほぼ一致した入力(いわゆる完全相関)がクリティカルであると考えられる。

3.3　パワースペクトル密度関数の変動を考慮した地震動モデル

第 2 章までで扱った極限外乱問題では，各方向の入力地動成分の Auto PSD 関数の形状が限界耐力計算における安全限界スペクトルに基づいて与えられていた。しかしながら，規定された Auto PSD 関数を用いることは対象とする地震動群をあらかじめ限定していることに相当する。例えば，十勝沖地震(2003)や新潟県中越地震(2004)により生じた被害で認識が広がった長周期帯域で大きなパワーを有する長周期地震動の影響を考慮するためには，前述の安全限界スペクトルに基づく Auto PSD 関数を適用することは適切とは言い難い。そこで本章では地震動の振動数特性に関する不確定性をより広義に捉え，任意の振動数成分を与えることが可能な地震動モデルを扱う。本章ではこのような地震動モデルをモデルフリー地震動と呼称する。

モデルフリー地震動に関する既往の研究については，以下のものが挙げられる。Iyenger，Manohar (1987)は, モデルフリー地震動として地動成分の Auto PSD 関数を振動子の線形の組み合せで表わし，極限外乱問題を固有値問題に置換することにより，モデルフリー地震動の係数を決定している。さらに竹脇(2001)は，より簡易な確率論的アプローチとして，地動成分の Auto PSD 関数を，上限値に制約を有する問題に対する解である有帯域ホワイトノイズに基づいて矩形形状で与えられるとしたう

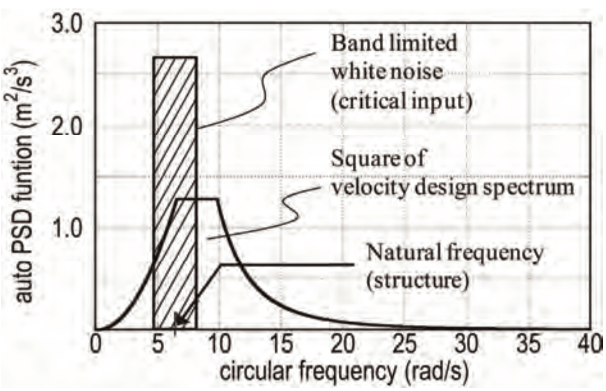


図 3-10 地動成分の Auto PSD 関数の定義の比較

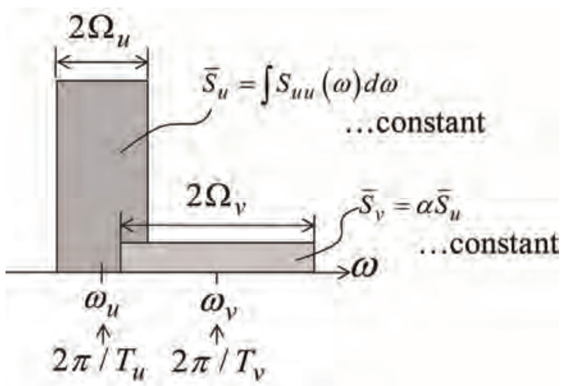


図 3-11 矩形 Auto PSD 関数

えで，極限外乱問題を展開している。ここでは，竹脇が提示したモデルフリー地震動を用いて，特定の振動数に卓越した振動数特性を有する有帯域ホワイトノイズに基づいて得られる矩形の Auto PSD 関数により与えられるものとする。

前述の Iyenger，Manohar (1987)や竹脇(2001)が用いたモデルフリー地震動を対象とする極限外乱問題では，対象とする建物モデルがいずれも 1 質点系などの簡易なものである。さらに 1 方向入力のみを対象とする場合は，最悪な Auto PSD 関数は，構造物モデルの卓越する固有円振動数と共振するような矩形形状となるのが一般的である。図 3-10 は, 第 2 章で用いた安全限界スペクトルに基づく Auto PSD 関数とモデルフリー地震動における Auto PSD 関数の違いを図示したものである。

本論文では 2 方向同時入力地震動を対象とするため, 構造物モデルの固有円振動数と共振を起こすような Auto PSD 関数がモデルフリー地震動において必ずしも最悪になるとは限らない。その理由は, 2 方向同時入力問題において入力地震動による相関性が応答増加の影響を有するためである。従って本章で扱う多成分入力地震動に対する極限外乱問題とは，任意の振動数特性を有する Auto PSD 関数において最悪な相関性を考慮した 2 乗平均応答和を最大化する最悪な Auto PSD 関数の組み合せを見出す問題となる。

次に本章におけるモデルフリー地震動のパラメターの設定について記す。本章では，モデルフリー地震動として，地動成分の Auto PSD 関数を矩形形状で与えることとする。矩形形状の Auto PSD 関数を決定づけるパラメターとしては振動数帯域(＝振動数バンド) Ω_U およびΩ_V であり，振動数帯域の中心は建物モデルの水平および鉛直方向の 1 次固有円振動数と一致するものとする。図 3-11 に，各方向の矩形 Auto PSD 関数のパラメターを図示する。各方向の Auto PSD 関数は，現実的な地震動群を想定するために，地震動のパワー(＝振動数領域での面積)に上限を設ける。鉛直方向入力の Auto PSD 関数パワー$\overline{S}_v$は，水平方向地動成分の Auto PSD 関数パワー$\overline{S}_u$の定数倍で与えるものとする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(\omega) d\omega \le \overline{S}_u \tag{3-29}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{vv}(\omega) d\omega \le \overline{S}_v = \alpha \overline{S}_u \tag{3-30}$$

ここで$\overline{S}_u$は，第 2 章において分析した結果に基づいて適切な値を用いることとする。

3.4 最悪なパワースペクトル密度関数(Auto PSD 関数)の組み合せ問題

本章における極限外乱問題は，3.3 節で定義したモデルフリー地震動のもとで，対象とする応答量を最大化する最悪な矩形 Auto PSD 関数の組み合せ，すなわち各方向の Auto PSD 関数の振動数バンドΩ_U およびΩ_V を決定する問題である。水平上下同時入力を受ける平面骨組の梁端部曲げモーメント和の 2 乗平均応答における相関項を最大化する最悪な Cross PSD 関数は(3-28)式で表わされたが，モデルフリー地震動を対象とする場合は, 前述の振動数バンドのパラメターに応じて応答値が異なる。(3-28)式を見れば, 地動成分間の相関による SRSS 応答に対する応答増加は, 各方向の地動成分の Auto PSD 関数の相乗平均のパワーと関連がある。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{S_{uu}(\omega) S_{vv}(\omega)} d\omega \tag{3-31}$$

そこで本節では，まず(3-31)式を最大化する矩形 PSD 関数における最悪な振動数バンドの組み合せを決定する問題に対する定式化を示す。

水平および鉛直方向の 1 次固有円振動数を ω_u，ω_v とし，各矩形 PSD 関数の振動数バンド Ω_U，Ω_V を用いれば，(3-31)式は各方向の Auto PSD 関数が振動数領域において重なる部分のみ有意であることを意味しているので，(3-31)式は次のように表すことができる。ただし，簡単のために以下では $2|\omega_u-\omega_v|$ を ω_L と表記する。

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{S_{uu}(\omega)S_{vv}(\omega)}d\omega\\
&=\begin{cases}
0 & (\Omega_U+\Omega_V\le\omega_L)\\
\Omega_U\sqrt{\dfrac{\bar{S}_u\bar{S}_v}{\Omega_U\Omega_V}} & (\Omega_V-\Omega_U\ge\omega_L)\\
\Omega_V\sqrt{\dfrac{\bar{S}_u\bar{S}_v}{\Omega_U\Omega_V}} & (\Omega_U-\Omega_V\ge\omega_L)\\
\{(\Omega_U+\Omega_V)/2-|\omega_u-\omega_v|\}\sqrt{\dfrac{\bar{S}_u\bar{S}_v}{\Omega_U\Omega_V}} & (\Omega_U+\Omega_V\ge\omega_L\cap\Omega_V-\Omega_U\le\omega_L\cap\Omega_U-\Omega_V\le\omega_L)
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{3-32}
$$

ここに α は Auto PSD 関数のパワーの比率 $\bar{S}_v/\bar{S}_u$ を表す。

(3-32)式に示した分類は，各方向の 1 次固有円振動数の差分と，振動数バンドの差分の関係により定まるもので，(3-32)式の 4 つの領域をそれぞれ上から順に(1)，(2)，(3)，(4)と表すこととすれば，図 3-12 のように表わされる。図において(1)の領域では，各方向の Auto PSD 関数が重なる領域が存在しないため，(3-31)式の積分値が 0 となり，相関性を有しない。また，(2)および(3)の領域では，一方の Auto PSD 関数の振動数バンドが比較的大きいため，各方向いずれかの Auto PSD 関数を完全に包絡する場合に相当する。このときの(3-31)式における積分区間は $\omega_L-(\Omega_U/2)$（または，$\omega_L-(\Omega_V/2)$）から $\omega_L+(\Omega_U/2)$（または，$\omega_L+(\Omega_V/2)$）に限定される。最後に(4)の領域は，各方向の Auto PSD 関数の一部が重なる領域を有する場合に相当する。各領域における Auto PSD 関数の組み合せを図 3-13 にまとめる。

(3-32)式において未知の変数は，各方向の Auto PSD 関数の振動数バンド Ω_U および Ω_V である。(3-32)式の停留点（＝極大値）を与える Ω_U および Ω_V を求めるためには，(3-32)式を Ω_U および Ω_V に関して微分することにより次式を満たす必要がある。

$$
\frac{\partial}{\partial\Omega_U}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{S_{uu}(\omega)S_{vv}(\omega)}d\omega\right)=0 \tag{3-33a}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\Omega_V}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{S_{uu}(\omega)S_{vv}(\omega)}d\omega\right)=0 \tag{3-33b}
$$

まず，(3-32)式における領域(2)および(3)に関して，(3-33a)式および(3-33b)式を展開すれば，Ω_U および Ω_V に関して次式が得られる。

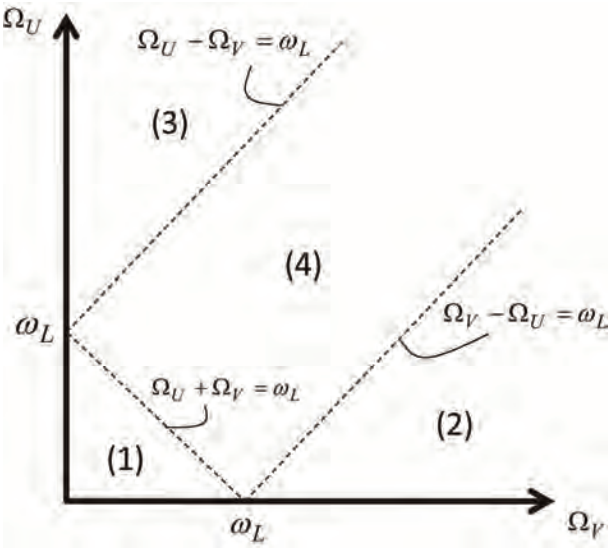


図 3-12 振動数バンドに対する Auto PSD 関数の各領域における水平および

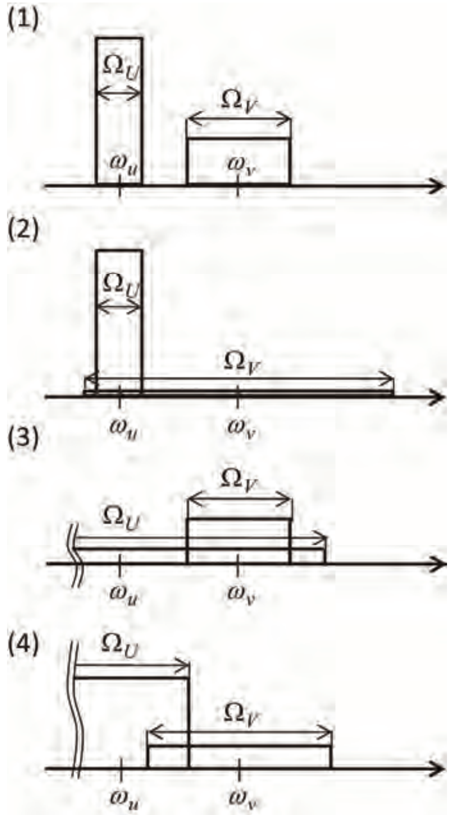


図 3-13 各領域における水平および鉛直方向 Auto PSD 関数の組み合せ

$$(3-33a) \Rightarrow \frac{\sqrt{\bar{S}_u \bar{S}_v}}{2\sqrt{\Omega_U \Omega_V}} > 0,\ (3-33b) \Rightarrow -\frac{1}{2\Omega_V}\sqrt{\frac{\Omega_U \bar{S}_u \bar{S}_v}{\Omega_V}} < 0 \tag{3-34a,b}$$

(3-34)式より，領域(2)には極値が存在せず単調減少することがわかる。また領域(3)も同様である。一方，領域(4)に関して(3-33a)式および(3-34b)式を展開すれば，次式を得る。

$$\begin{aligned}(3-33a) &\Rightarrow \frac{\sqrt{\bar{S}_u \bar{S}_v}}{2\Omega_U \sqrt{\Omega_U \Omega_V}}\left((\Omega_U-\Omega_V)/2+|\omega_u-\omega_v|\right)=0 \\ &\Rightarrow \Omega_V-\Omega_U=2|\omega_u-\omega_v|\end{aligned} \tag{3-35a}$$

$$\begin{aligned}(3-33b) &\Rightarrow \frac{\sqrt{\bar{S}_u \bar{S}_v}}{2\Omega_V \sqrt{\Omega_U \Omega_V}}\left((\Omega_V-\Omega_U)/2+|\omega_u-\omega_v|\right)=0 \\ &\Rightarrow \Omega_U-\Omega_V=2|\omega_u-\omega_v|\end{aligned} \tag{3-35b}$$

(3-35a)式および(3-35b)式では，いずれかの式において両辺の符号を入れ替えれば，左辺が等価なものであるにもかかわらず，右辺の項の符号が異なる。従って(3-35a)式および(3-35b)式を共に満たすΩ_UおよびΩ_Vは存在しない。ただし，(3-36)式において各方向のω_uおよびω_vが一致する場合は，$\Omega_U=\Omega_V$上で極値をとる。

ここで，振動数バンドをパラメトリックに変化させた際の各方向 Auto PSD 関数の相乗平均パワー

について数値的に分析を行い，上述の(3-32)式に示した各領域における極大値の有無について検証を行う。各方向の Auto PSD 関数パワーは，$\bar{S}_u = 10\,[\mathrm{m^2/s^4}]$，$\bar{S}_v = 2.5\,[\mathrm{m^2/s^4}]$とし，解析ケース A では，比較的水平および鉛直方向の固有円振動数が近接するモデルとし，$\omega_u = 3\,[\mathrm{rad/s}]$，$\omega_v = 4\,[\mathrm{rad/s}]$とする。また，解析ケース B では，上下方向の固有周期が短く，各方向の固有円振動数に相対的に差が生じるモデルとし，$\omega_u = 3\,[\mathrm{rad/s}]$，$\omega_v = 6\,[\mathrm{rad/s}]$とする。図 3-14 は，それぞれの解析ケースについて振動数バンドΩ_UおよびΩ_Vを 0.0[rad/s]から 10.0[rad/s]までパラメトリックに変動させ，(3-31)式で表わされる Auto PSD 関数の相乗平均のパワーの等高線図を 2 次元上に図示したものである。図より，$\mathbf{\Omega} = \{\Omega_U, \Omega_V\}$が$\mathbf{\Omega} = \{0, 2|\omega_u - \omega_v|\}$もしくは$\mathbf{\Omega} = \{2|\omega_u - \omega_v|, 0\}$において極大値を有していることがわかる。これは，(3-34)式からわかるように，領域(2)および(3)においてΩ_UまたはΩ_Vに対して Auto PSD 関数の相乗平均のパワーが単調減少していることからも明らかである。また，固有円振動数が近接しているモデルのほうが，Auto PSD 関数の相乗平均のパワーが大きくなることが確認できる。

以上のように，矩形 PSD 関数を決定づけるパラメターである振動数バンドΩ_UおよびΩ_Vと Auto PSD 関数の相乗平均のパワーの関係性について定式化を行い，Auto PSD 関数の相乗平均のパワーを最大化する振動数バンドΩ_UおよびΩ_Vを特定することが可能であることを示した。しかしながら，(3-28)式に示す梁端部曲げモーメントの 2 乗平均応答における入力地震動の相関に関する極限応答の項については，Auto PSD 関数の相乗平均だけではなく，構造物特性に起因する時間-振動数依存の伝達関数の項が存在する。これにより，時間の経過や振動数域により Auto PSD 関数の振幅値が変動するため，実際に(3-28)式を最大化する最悪なΩ_UおよびΩ_Vは，前述した Auto PSD 関数の相乗平均のパワーの極大値を与えるΩ_UおよびΩ_Vとは必ずしも一致しないと考えられる。

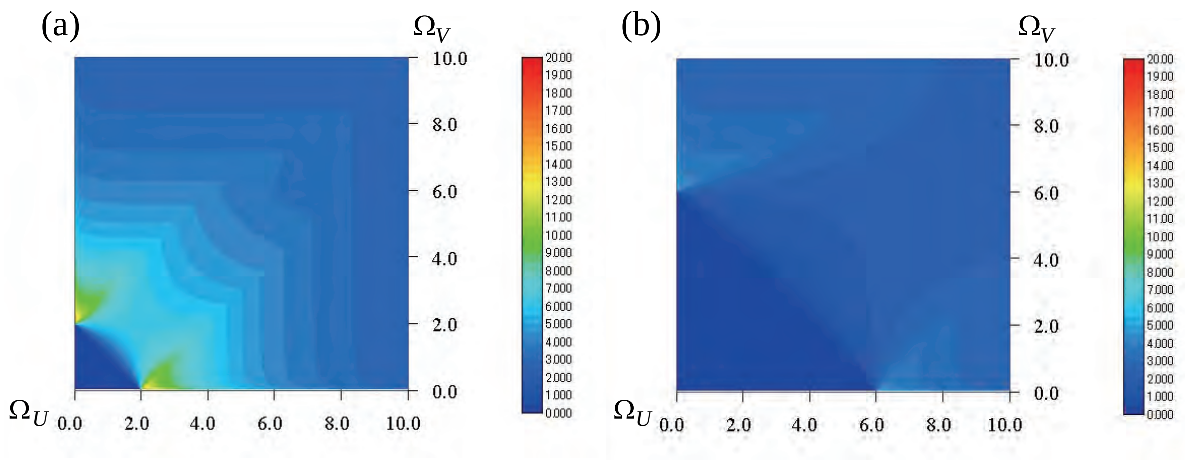


図 3-14 振動数バンドの変化に対する Auto PSD 関数の相乗平均のパワー

(a) 解析ケースＡ：固有円振動数近接モデル($\omega_u = 3\,[\mathrm{rad/s}], \omega_v = 4\,[\mathrm{rad/s}]$)

(b) 解析ケースＢ：固有円振動数乖離モデル($\omega_u = 3\,[\mathrm{rad/s}], \omega_v = 6\,[\mathrm{rad/s}]$)

3.5　水平上下同時入力地震動のパラメター変動が極限応答に及ぼす影響

本節では，水平上下地動成分の振動数特性の変動が極限応答に及ぼす影響について検討し，梁端部曲げモーメント和の 2 乗平均応答を最大化するような最悪な Auto PSD 関数の組み合せを見出すパラメトリック解析を展開する。対象とする構造物モデルは，3.2.4 節でも扱った 1 層 1 スパン平面骨組とする(各部材寸法等は, 表 3-1 に従う)。3.2.4 節におけるスパン長に関するパラメトリック解析より，スパン長 $L = 17\text{m}$ では各方向の固有円振動数が近接しており, 相関による応答増加の影響が顕著である。ここでは，3.2.4 節の結果を踏まえて，スパン長が異なる 2 つのモデル(a) $L = 17\text{m}$ (b) $L = 24\text{m}$ を対象とする。スパン長 $L = 17\text{m}$ および $L = 24\text{m}$ における構造物諸元は表 3-2 に示す。

モデルフリー地震動の制約条件としては，各方向の地動成分の Auto PSD 関数のパワー（＝振動数域での積分値）である。水平および鉛直各方向の Auto PSD 関数のパワーの上限値 $\bar{S}_u$ および $\bar{S}_v$ を指定する際には，想定する地震動群の入力レベルに十分に留意する必要がある。表 3-3 は，記録地震波の水平，鉛直各方向の地動成分の Auto PSD 関数のパワーについて分析した結果をまとめたものである。表より，鉛直方向の Auto PSD 関数のパワー $\bar{S}_v$ は $\bar{S}_u$ の 1/4~1/3 程度となっていることが確認できる。本節では， $\bar{S}_u$ および $\bar{S}_v$ をそれぞれ $10.0[\text{m}^2/\text{s}^4]$， $2.5[\text{m}^2/\text{s}^4]$ で与えるものとする。

図 3-15 は，二つの異なるスパン長のモデルにおいて，(3-28)式において構造物特性により記述される時間-振動数依存の伝達関数 $\sqrt{f_1(t;\omega)^2 + f_2(t;\omega)^2}$ を図示したものである。図より, スパン長 $L = 17\text{m}$ の場合は，特定の周波数帯域で単一のピーク値を有することが確認できる。これは水平方向および鉛直方向の 1 次固有円振動数が近接しており，各方向の応答増幅帯域が互いに重なることに起因する。

表 3-2 スパン長 $L = 17\text{m}$ および $L = 24\text{m}$ の平面骨組の構造物諸元

Span length	$L = 17.0\text{m}$	$L = 24.0\text{m}$
horizontal stiffness k_u (N/mm)	2.18×10^8	1.95×10^8
vertical stiffness k_v (N/mm)	1.07×10^8	4.16×10^7
mass in horizontal direction m_u (kg)	1.79×10^6	2.70×10^6
mass in vertical direction m_v (kg)	0.89×10^6	1.35×10^6
horizontal natural period T_u (s)	0.560	0.741
vertical natural period T_v (s)	0.563	1.131
damping ratio h_u, h_v	0.02	0.02

表 3-3 代表的な記録地震波の水平方向，鉛直方向 Auto PSD 関数のパワーの分析

地震波	水平方向 $[\text{m}^2/\text{s}^4]$		鉛直方向 $[\text{m}^2/\text{s}^4]$
	NS	EW	
El Centro (1940)	0.2059	0.1228	0.0602
Taft (1952)	0.0933	0.0101	0.0045
JMA Kobe (1995)	6.5980	4.3435	1.4090

一方，スパン長$L = 24\mathrm{m}$の場合は，前者の場合に比べてやや複雑な形状となっており，異なる振動数域において二つのピークが見られる。これは，スパン長$L = 24\mathrm{m}$では，水平方向および鉛直方向の固有円振動数が異なっており，各方向の応答増幅が顕著となる振動数帯域の相互関係が希薄になるためである。このように，建物モデルに応じて，相関に関する項を構成する伝達関数$\sqrt{f_1(t;\omega)^2 + f_2(t;\omega)^2}$の特性は大きく異なる。従って，対象とする応答量を最大化するモデルフリー地震動のパラメター特性は，構造物特性に大きく依存することに留意する必要がある。

図 3-16 は，モデルフリー地震動のパラメター特性の変動による応答量の変化を示したものである。図 3-16 においては，水平方向の Auto PSD 関数$S_U(\omega)$の振動数バンドΩ_Uを固定したもとで，鉛直方向の Auto PSD 関数$S_V(\omega)$の振動数バンドΩ_Vをパラメトリックに変動させた際の梁端部曲げモーメント和の 2 乗平均応答の変化を図示している。図中において，critically correlated とは，梁端部曲げモーメント和の 2 乗平均応答において本極限外乱法により見出した最悪な相関を考慮した場合であ

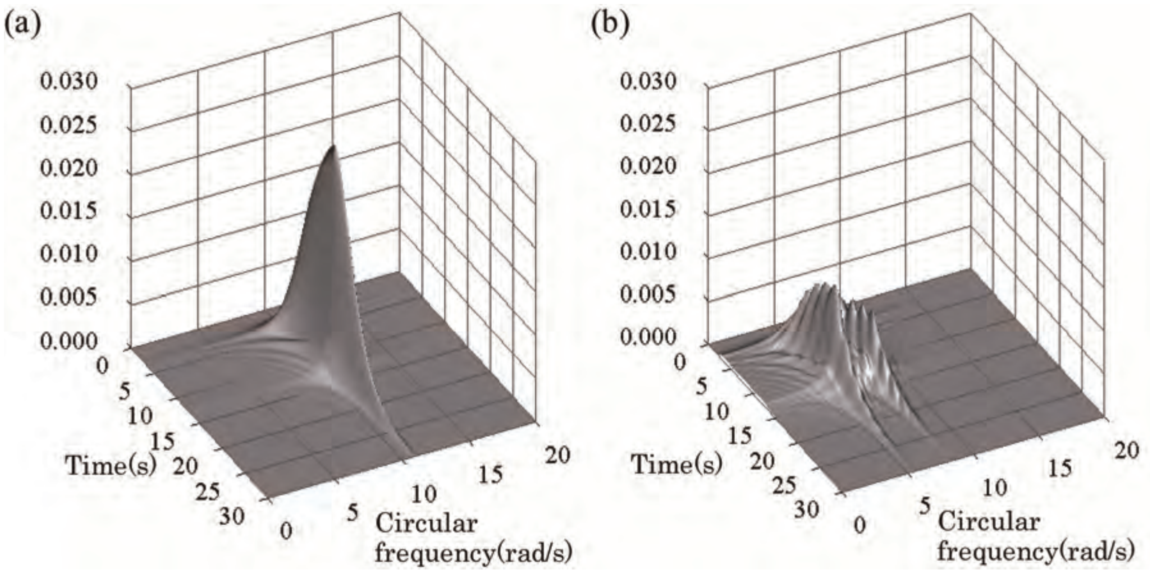


図 3-15 伝達関数$\sqrt{f_1(t;\omega)^2 + f_2(t;\omega)^2}$の$t-\omega$領域 3 次元図

(a) $L = 17\mathrm{m}$, (b) $L = 24\mathrm{m}$

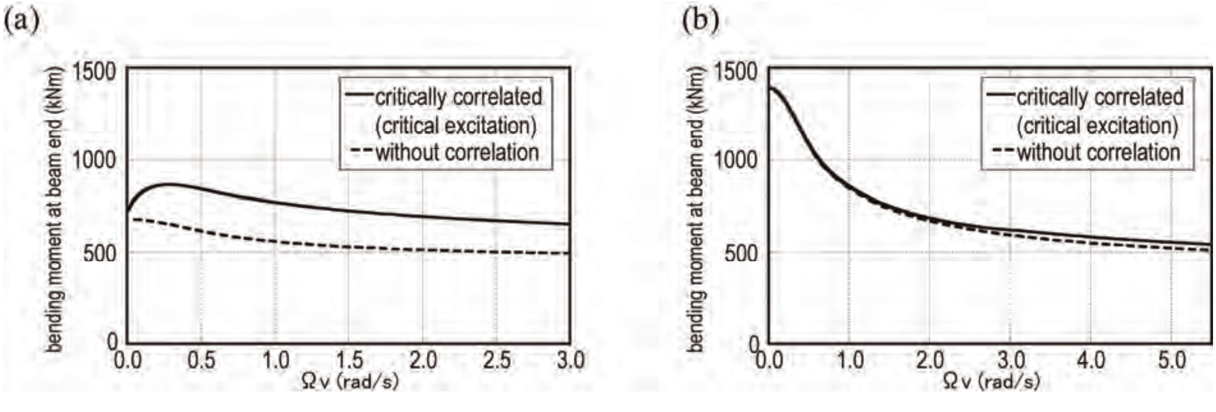


図 3-16 鉛直方向地動成分の Auto PSD 関数の振動数バンドのパラメトリック変動に対する梁端部曲げモーメント和の 2 乗平均応答における相関項の有無の影響

(a) $L = 17\mathrm{m}$ (b) $L = 24\mathrm{m}$

り，without correlation とは，相関項を考慮しない各方向の応答の 2 乗和平方根(=SRSS 応答)を表す。図より，スパン長 $L=17\text{m}$ の場合では入力外乱の相関関係による応答増幅効果が顕著にみられ，鉛直方向の振動数バンド Ω_V が 0.2−0.5(rad/s)の間で最大となっていることがわかる。一方，図 3-16(b)のスパン長 $L=24\text{m}$ の場合では，(3-35)式により求めた最悪な振動数バンドはおよそ 3[rad/s]であり，同図より振動数幅 3[rad/s]付近で若干の違いがみられ，相関による応答増加の影響を確認することができる。しかしながら，鉛直方向の矩形 Auto PSD 関数の振動数バンドが小さい方がより大きな応答となっている。これは，各方向の Auto PSD 関数の卓越振動数の帯域が狭く，各方向の固有振動数に近接することによって各方向でそれぞれ共振現象が生じることに起因する。

このように入力と構造物の共振による応答増加と各方向入力の相関関係による応答増加の二つの異なる影響が互いに作用し合うため，多成分入力地震動における最悪な Auto PSD 関数の組み合せは構造物特性に依存して異なる。例えば，スパン長 $L=17\text{m}$ の場合では，図 3-15 に示したように相関に関する項を構成する伝達関数は特定の振動数(=水平および鉛直方向の固有円振動数)で単一のピーク値を有しているため，多成分入力地震動における相関による応答増加の影響が大きく最悪な Auto PSD 関数の組み合せ，すなわち指定した Ω_U に対する最悪な振動数バンド Ω_V が存在する。これは前節で求めた相関に関する項を最大化する最悪な Ω_U および Ω_V の組み合せの結果と一致する。一方，スパン長 $L=24\text{m}$ の場合では，振動数バンド Ω_V が小さいほど応答量が大きい。これは，多成分入力地震動における建物軸の各方向で共振的な入力が，応答増加の影響が最も顕著であるためである。このような場合には, 入力地震動における最悪な相関性が構造物の応答に及ぼす影響をほとんど見られない。

図 3-17 は，スパン長 $L=17\text{m}$ および $L=24\text{m}$ のモデルにおいて，振動数バンドの組み合せに対する各方向の地動成分に対応する Auto PSD 関数の組み合せにおいて，多成分入力地震動に対する構造物応答を最大化する最悪な Auto PSD 関数の組み合せを概念的に図示したものである。すなわち，構造物特性(ここではスパン長の違い)により，最悪な振動数バンドの組み合せが存在することを表している。図 3-17(a)に示すスパン長 $L=17\text{m}$ の場合では，水平方向と鉛直方向で特定の振動数バンドの組み合せが応答を最も増大させると考えられる。一方, 図 3-17(b)に示すスパン長 $L=24\text{m}$ の場合は,

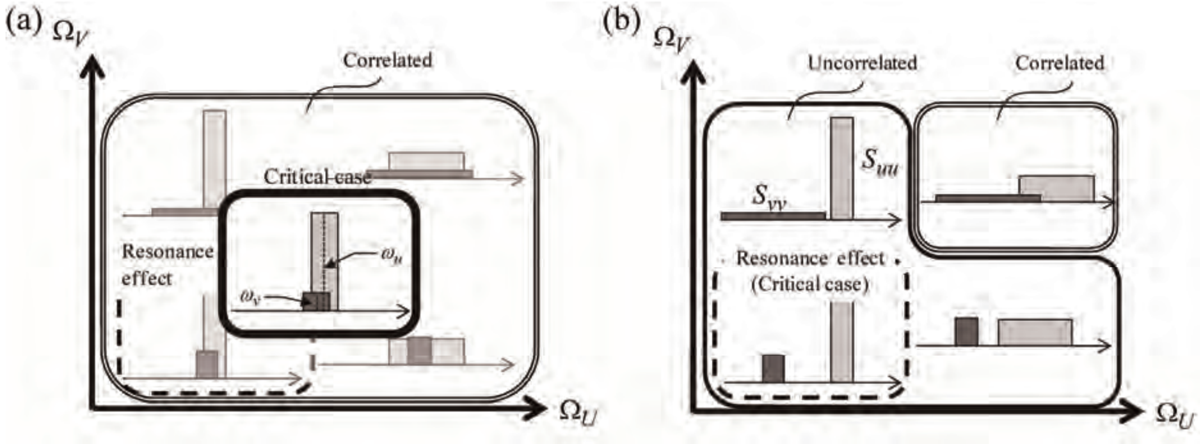


図 3-17 モデルの違いによる Auto PSD 関数の組み合せと相関の影響の比較
(a) $L=17\text{m}$, (b) $L=24\text{m}$

相関による応答増加が見られるのは振動数バンドΩ_UおよびΩ_Vが大きい領域であるが，相関による応答増加の影響はほとんど見られない。これは振動数バンドΩ_UおよびΩ_Vが大きい領域では，構造物の振動が卓越する固有円振動数付近の帯域での Auto PSD 関数の振幅レベルが相対的に小さくなり，共振による応答増加の影響が小さくなるためである。従って，各方向の固有円振動数に差があるスパン長$L = 24\mathrm{m}$の場合には, 各方向でそれぞれ共振的入力となるΩ_UおよびΩ_Vが小さい Auto PSD 関数の組み合せにおいて構造物応答が最大となる。

図 3-18 は，スパン長$L = 17\mathrm{m}$および$L = 24\mathrm{m}$のモデルにおいて，地動成分の Auto PSD 関数のパワーが一定の下で, 各方向の Auto PSD 関数の振動数バンドΩ_UおよびΩ_Vをそれぞれパラメターとした際に得られる梁端部曲げモーメント和の 2 乗平均応答に関する 3 次元俯瞰図を示したものである。すなわち，図 3-16 で得られたΩ_Uを固定した下でのΩ_Vに関するパラメトリック解析を，2 変数Ω_UおよびΩ_Vの変動を考慮したパラメトリック解析に拡張したものである。

図 3-18(a-1)および(b-1)は，それぞれスパン長$L = 17\mathrm{m}$および$L = 24\mathrm{m}$のモデルにおいて，相関による応答増加を考慮しない SRSS 応答について図示したものであり，図 3-18(a-2)および(b-2)は，相関項を考慮した極限応答を示している。これらを比較することにより，図 3-17 で提示した概念図の意味がより明瞭に理解される。すなわち，図 3-18(a-1)と(a-2)を比較すれば，各方向の固有円振動数が近接するスパン長$L = 17\mathrm{m}$の場合では, 振動数バンドが小さい領域で入力の相関の影響が顕著に表れるため, 最悪な相関関係を考慮した極限応答は相関を考慮しない SRSS 応答に比べて極めて大きな応答値を示している。一方，図 3-18(b-1)と(b-2)を比較すれば，各方向の固有円振動数が互いに異なるスパン長$L = 24\mathrm{m}$の場合において梁端部曲げモーメント和の 2 乗平均応答が最大となるのは, 振動数バンドΩ_UおよびΩ_Vが小さい領域である。図 3-18(b-2)より，振動数バンドΩ_UおよびΩ_Vが大きい領域において，多成分入力地震動における地動成分間の相関の影響が若干生じていることが確認できるが，評価対象とする構造物応答の上限値に関してはほとんど影響がないといえる。

図 3-19(a),(b)は，それぞれのスパン長に対する図 3-18 の解析結果において，梁端部曲げモーメント和の 2 乗平均応答を構成する相関項に関するコンター図を示したものである。図より，相関による応答増加の影響が顕著となる振動数バンドの組み合せ，すなわち Auto PSD 関数の組み合せを見出すことが可能であることが分かる。両者で応答増加の影響が顕著となる領域が異なるのは，図 3-17 に例示した概念図に既に記述したように, 水平および鉛直方向の動的な構造物特性を決定する重要な要素である固有円振動数の組み合せの違いに大きく依存するためである。

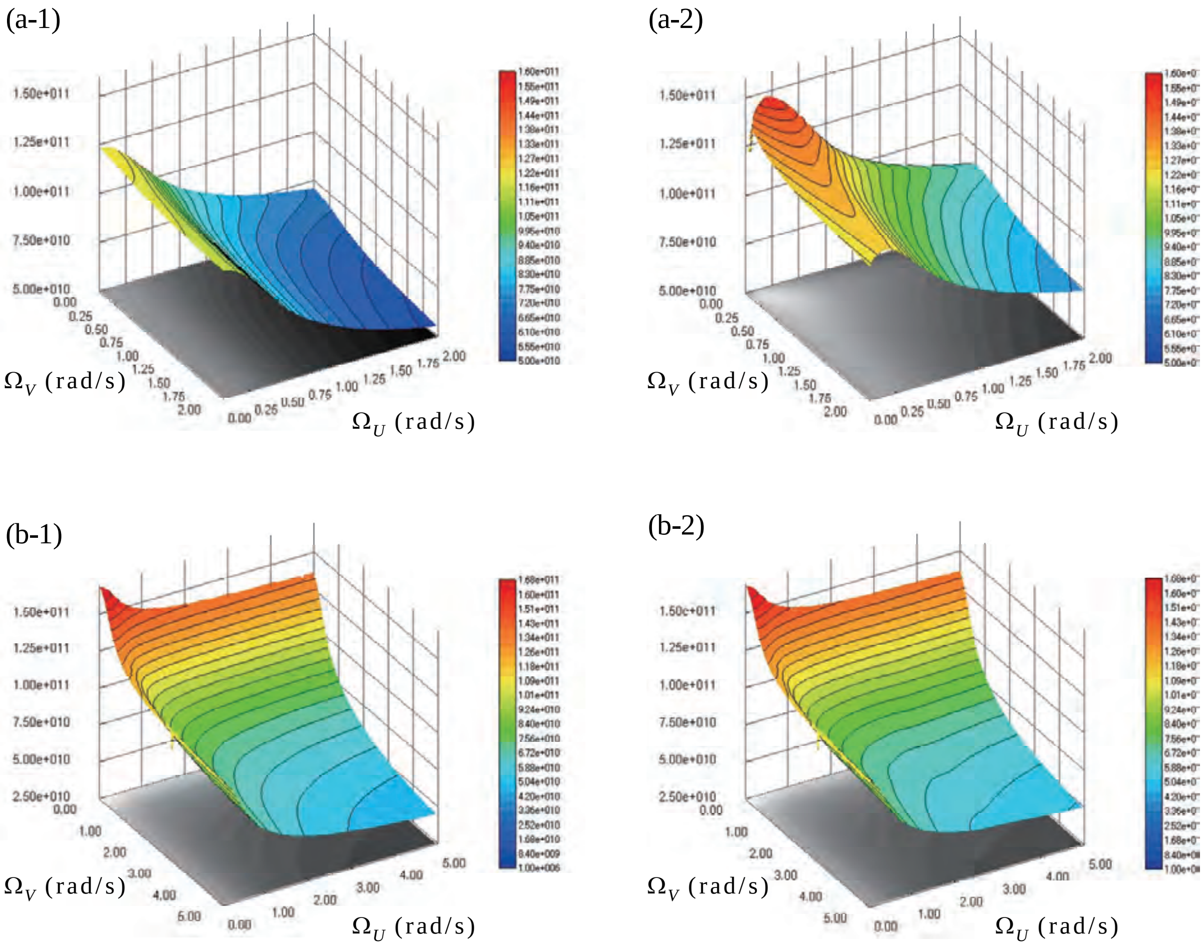


図 3-18 モデルフリー地震動のパラメトリック解析
梁端部曲げモーメント和の 2 乗平均応答の比較
(a-1) 相関考慮なし(SRSS 応答) $L = 17\mathrm{m}$, (a-2) 相関考慮(極限応答) $L = 17\mathrm{m}$
(b-1) 相関考慮なし(SRSS 応答) $L = 24\mathrm{m}$, (b-2) 相関考慮(極限応答) $L = 24\mathrm{m}$

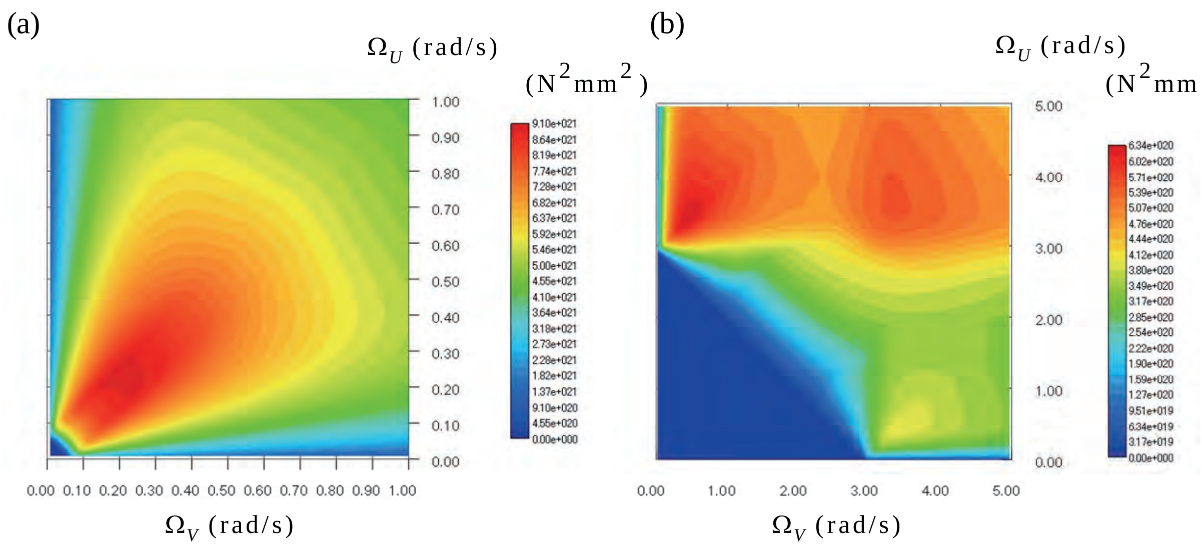


図 3-19 2 乗平均応答における相関項による応答増加効果の比較
(a) $L = 17\mathrm{m}$, (b) $L = 24\mathrm{m}$

3.6 最悪位相差を考慮した極限外乱法の時間領域への適用

これまでに構築してきた多成分入力地震動の成分間の相関性に関する極限外乱法では，構造物の 2 乗平均応答を対象としている。すなわち，本極限外乱理論では 2 乗平均応答におけるクロス項を最大化する最悪な Cross PSD 関数を明らかにしている。しかしながら，2 乗平均応答は確率論的な応答量であるため, 時刻歴での最大応答値を最大化する極限入力の特性を直接的に扱っているとは言い難い。従って, 時間領域においてどのような入力地震動の組み合せが構造物に対して最悪なシナリオを生じさせるかということに関しては, 本極限外乱理論により得られた最悪な Cross PSD 関数からすぐには把握できない。第 2 章 6 節では，最悪な Cross PSD 関数から時間領域における多成分入力地震動の作成法について取り上げた。しかしながら，2.6 節で扱った方法は確率論的な立場に基づくモンテカルロシミュレーションにより地震動群の特性を見出すものであるため，入力地震動の Auto PSD 関数が既知であったとしても, 地震波の生成時に乱数を用いるため応答に相当なばらつきを生じることに留意する必要があった。そのため，2.6 節で示した方法において多次元入力地震動を受ける構造物の時刻歴応答を最大化する最悪な入力の組み合せを見出すためにはモンテカルロシミュレーションによる計算負荷が極めて高いという問題が存在している。

ところで，構造設計を行う上で多成分入力地震動の影響を考慮する場合には，確定的な入力地震動に対して最悪な位相差を有する他方向の入力の組み合せを見出すことが有用であると考えられる。構造設計時に用いられる標準的な記録地震波やスペクトル適合波の 1 成分(NS 方向や EW 方向)が与えられたもとで, 多次元入力地震動下において構造物に対して最悪なシナリオを生じさせる建物軸の他方向の時刻歴成分を見出すということはこれまでの研究からは十分に明らかにされていない。そこで本節では, 第 2 章および第 3 章で展開してきた多次元入力地震動の地動成分間の相関性に関する極限外乱理論に基づいて得られる最悪な Cross PSD 関数を用いて, 時間領域において最悪な位相差を有する多成分入力地震動を見出す 2.6 節とは異なる方法について提示する。

時系列波形 $\ddot{u}_x(t)$ の成分が既知であれば，そのフーリエ変換 $\ddot{U}_x(\omega)$ の実部 $\mathrm{Re}[\ddot{U}_x(\omega)]$ および虚部 $\mathrm{Im}[\ddot{U}_x(\omega)]$ はそれぞれ既知である。すなわち，1 成分のフーリエ振幅とその位相角が与えられる。また，逆に $\mathrm{Re}[\ddot{U}_x(\omega)]$ および $\mathrm{Im}[\ddot{U}_x(\omega)]$ を用いて，逆フーリエ変換を実施すれば，時間領域での $\ddot{u}_x(t)$ の成分を再現することが可能である。これらは互いに 1 対 1 の関係が成り立っている。本節では，$\ddot{U}_x(\omega)$ に対する最悪な Cross PSD 関数による位相角の操作を行うことで，$\ddot{U}_y(\omega)$ の実部，虚部を決定し，時系列波形 $\ddot{u}_y(t)$ を求めることを考える。

第 2 章で扱った極限外乱問題では，各方向の入力地震動の Auto PSD 関数 $S_{xx}(\omega)$ および $S_{yy}(\omega)$ が既知であると仮定していた。このことは，Auto PSD 関数の定義に従えば，各方向の地動成分のフーリエ振幅スペクトルが既知であることに相当する。しかしながら，フーリエ振幅スペクトルは，フーリエ変換 $\ddot{U}_x(\omega)$ の絶対値 $|\ddot{U}_x(\omega)|$ であるため，その実部 $\mathrm{Re}[\ddot{U}_x(\omega)]$ および虚部 $\mathrm{Im}[\ddot{U}_x(\omega)]$ は定まらない。地動加速度成分のフーリエ変換の実部および虚部と Cross PSD 関数の関係を見出すことで，Cross PSD 関数が与えられた下での $\ddot{U}_y(\omega)$ の実部，虚部を決定する方法を提示する。入力地震動の各方向のフーリエ変換の実部および虚部を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\omega) &= \left\{x_1(\omega), x_2(\omega), x_3(\omega), x_4(\omega)\right\} \\ &= \left\{\mathrm{Re}[\ddot{U}_x(\omega)], \mathrm{Im}[\ddot{U}_x(\omega)], \mathrm{Re}[\ddot{U}_y(\omega)], \mathrm{Im}[\ddot{U}_y(\omega)]\right\}\end{aligned} \tag{3-36}$$

$\mathbf{x}(\omega)$ に関する既知量は次のとおりである。

1) 入力地震動における各方向の Auto PSD 関数 $S_{xx}(\omega)$，$S_{yy}(\omega)$

2) X 方向，Y 方向に関する Cross PSD 関数 $S_{xy}(\omega)$ の実部および虚部

(2：極限外乱理論に基づいて得られる最悪な Cross PSD 関数)

ここで Auto PSD 関数の定義に従えば，$\mathbf{x}(\omega)$ に関して次式を得る。

$$x_1{}^2(\omega)+x_2{}^2(\omega)=2\pi T\cdot S_{xx}(\omega) \tag{3-37}$$

$$x_3{}^2(\omega)+x_4{}^2(\omega)=2\pi T\cdot S_{yy}(\omega) \tag{3-38}$$

また，Cross PSD 関数は次式で定義される。

$$S_{xy}(\omega)=\frac{\ddot{U}_x(\omega)^*\ddot{U}_y(\omega)}{2\pi T} \tag{3-39}$$

ここに*は複素共役を表す。(6-39)式をフーリエ変換の成分で表記すれば次式を得る。

$$C_{xy}(\omega)+Q_{xy}(\omega)\mathrm{i}=\frac{(x_1-x_2\mathrm{i})(x_3+x_4\mathrm{i})}{2\pi T} \tag{3-40}$$

これまでに展開してきた最悪な相関性を見出す極限外乱法では，Auto PSD 関数が既知のもとで Cross PSD 関数の実部 $C_{xy}(\omega)$ および虚部 $Q_{xy}(\omega)$ を見出している。従って，(3-40)式の左辺は既知量として扱うことが可能である。(3-40)式の左辺と右辺の対応から $\mathbf{x}(\omega)$ に関して次式を得る。

$$x_1(\omega)x_3(\omega)+x_2(\omega)x_4(\omega)=2\pi TC_{xy}(\omega) \tag{3-41}$$

$$x_1(\omega)x_4(\omega)-x_2(\omega)x_3(\omega)=2\pi TQ_{xy}(\omega) \tag{3-42}$$

(3-37)式，(3-38)式，(3-41)式および(3-42)式より，$\mathbf{x}(\omega)$ に関する関係式が得られた。

ここで，$\mathbf{x}(\omega)$ に関する方程式を解く上で，PSD 関数がフーリエ振幅スペクトルを 2 乗したものを継続時間で除したもので定義されたことに留意すれば, フーリエ変換の実部および虚部との関係性から $x_1(\omega),x_2(\omega),x_3(\omega),x_4(\omega)$ は，各振動数において PSD 関数の振幅値を半径に持つ円周上の点である。従って，$\mathbf{x}(\omega)$ を極座標上に次のように置き換えることが可能である。

$$\begin{aligned}x_1(\omega)&=\{2\pi T\cdot S_{xx}(\omega)\}^{1/2}\cos(\theta(\omega)),\ x_2(\omega)=\{2\pi T\cdot S_{xx}(\omega)\}^{1/2}\sin(\theta(\omega))\\x_3(\omega)&=\{2\pi T\cdot S_{yy}(\omega)\}^{1/2}\cos(\phi(\omega)),\ x_4(\omega)=\{2\pi T\cdot S_{yy}(\omega)\}^{1/2}\sin(\phi(\omega))\end{aligned} \tag{3-43}$$

極座標を導入することにより，(3-43)式における未知変数は，$\theta(\omega)$ および $\phi(\omega)$ （=振動数の関数）となる。(3-43)式を(3-41)式および(3-42)式に代入すれば，$\theta(\omega)$ および $\phi(\omega)$ に関して次式を得る。

$$\cos(\theta(\omega)-\phi(\omega))=\frac{C_{xy}(\omega)}{\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}} \tag{3-44}$$

$$\sin(\theta(\omega)-\phi(\omega))=\frac{-Q_{xy}(\omega)}{\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}} \tag{3-45}$$

(3-44)式および(3-45)式において$C_{xy}(\omega)$，$Q_{xy}(\omega)$は互いに複素数平面上の円周上の同一点であるため，(3-44)式と(3-45)式は等価な式である。従って，(3-44)式から$\theta(\omega)$および$\phi(\omega)$の相互関係を得ることは可能であるが，$\theta(\omega)$および$\phi(\omega)$を独立に決定することはできない。しかしながら，仮に 1 方向成分の Auto PSD 関数の各振動数における$\theta(\omega)$が既知であれば，他方向の Auto PSD 関数における$\phi(\omega)$を最悪な Cross PSD 関数$C_{xy}(\omega)$または$Q_{xy}(\omega)$から求めることが可能である。

1 方向成分の時系列波形$\ddot{u}_x(t)$が任意に与えられれば，そのフーリエ変換$\ddot{U}_x(\omega)$により Auto PSD 関数の各振動数における$\theta(\omega)$が求められる。従って，1 方向地動成分を指定することで$\theta(\omega)$が既知であれば, (3-44)式または(3-45)式から導かれるフーリエ位相角と最悪な Cross PSD 関数の関係に基づいて，他方向の入力の位相角を一意に定めることが可能となる。図 3-20 は，Cross PSD 関数の偏角(=atan(クオドスペクトル／コスペクトル)が各方向の入力のフーリエ位相角の差として表わされることを図示しており，Cross PSD 関数が既知であれば，一方の入力地震動の位相角の情報から他方向の入力地震動の位相角を指定することが可能であることを示している。

次節では, 任意の 1 方向成分が与えられたもとで最悪な位相差特性を考慮した他方向の極限外乱を見出す方法の有用性についていくつかの数値例を用いて例証する。

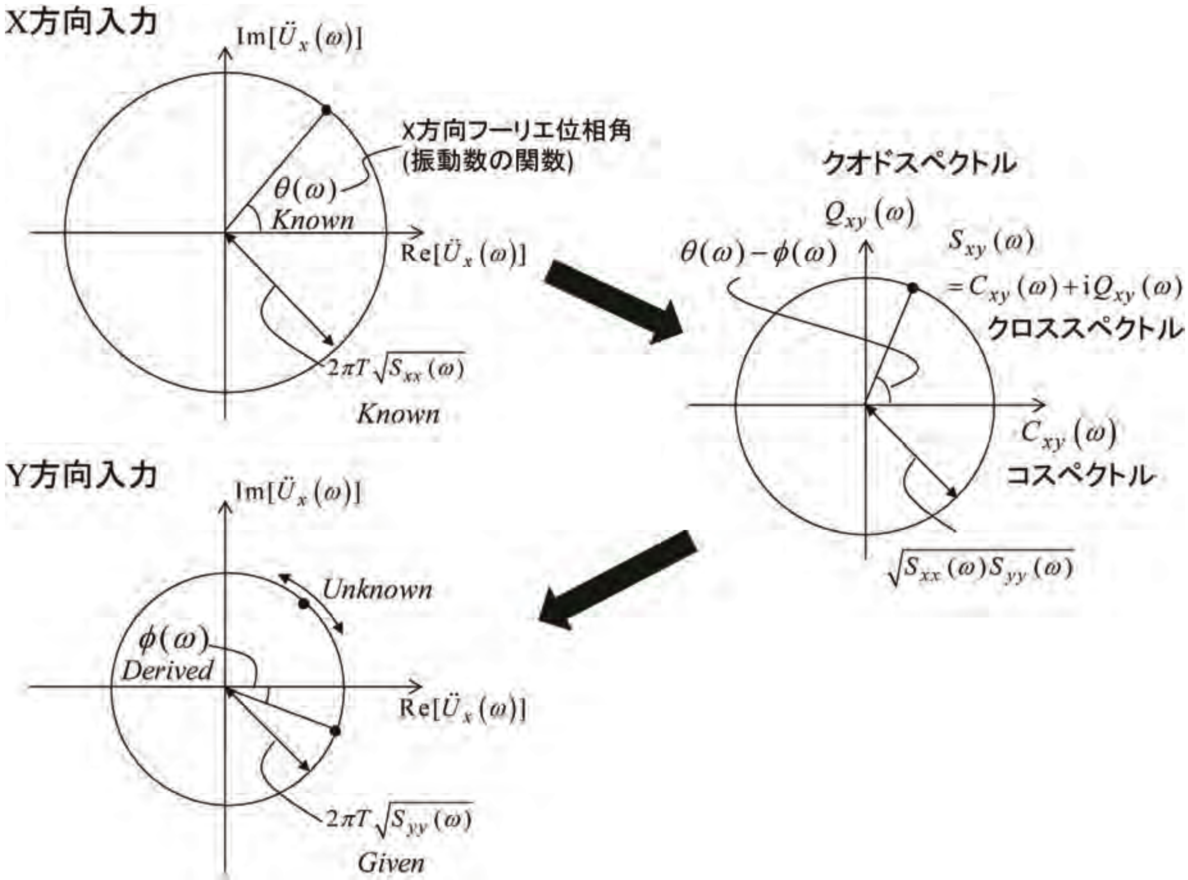


図 3-20 最悪な Cross PSD 関数を用いた他方向入力の位相角の決定法

3.6.1　正弦波による入力外乱に対する最悪位相差入力

任意の時系列波形に対して，最悪な位相特性を与える他方向の極限外乱を求める。対象とする建物モデルは，前節で扱った平面骨組(スパン長 24m)とし，構造物の諸元は表 3-2 で与える。

本節では，まず最も単純な例として，各方向の入力の Auto PSD 関数が単一の卓越周波数の正弦波を用いて与える場合について考える。図 3-21 では，水平方向入力として，3.0Hz の正弦波に包絡関数を乗じたものを図示している(スパン長 24m の平面骨組における水平方向固有振動数は 1.35Hz)。図 3-22 は，図 3-21 に示した正弦波入力において包絡関数を乗じる以前の定常振動成分に対するフーリエ振幅スペクトルから評価される Auto PSD 関数を示したもので, 図 3-23 および図 3-24 は, Auto PSD 関数を評価する過程で得られるフーリエ成分(実部および虚部)および位相角をそれぞれ図示したも

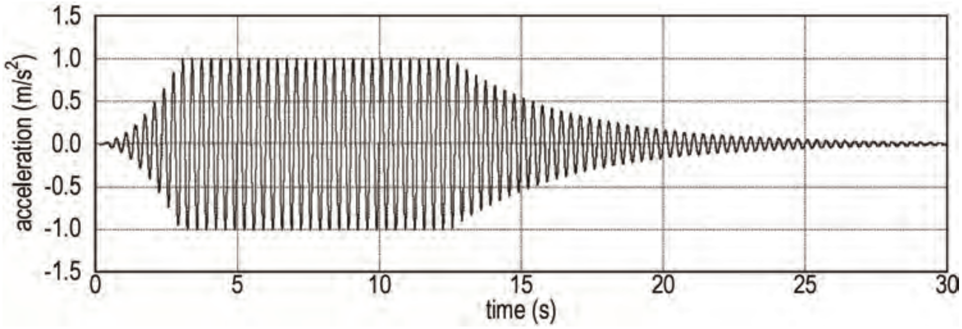


図 3-21 包絡関数を乗じた正弦波による水平方向入力 (2Hz)

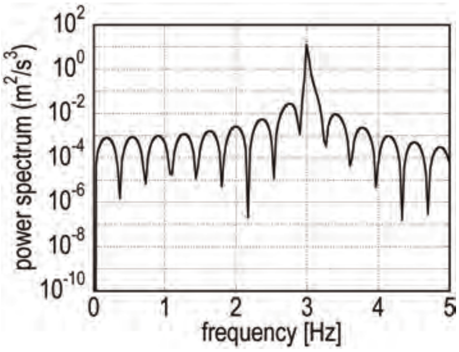


図 3-22 水平方向パワースペクトル

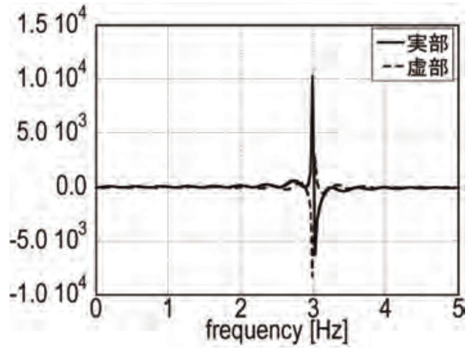


図 3-23 フーリエ成分

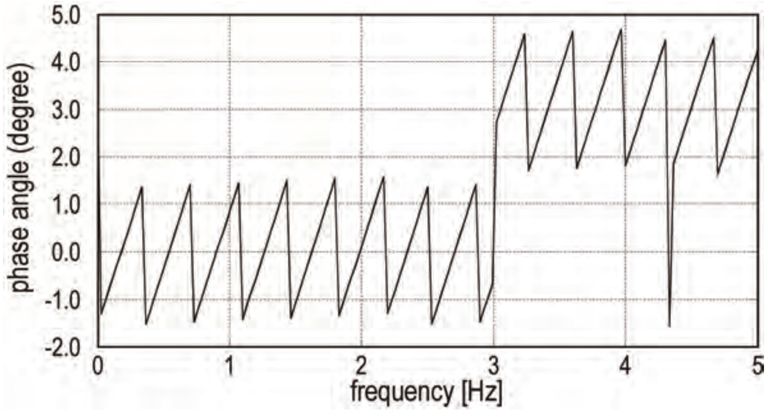


図 3-24 水平方向入力のフーリエ成分における位相角

のである。位相角では，振動数に応じて大きな変動がみられ，高振動数域では周期的な位相角の変化が見られる。

水平方向の加速度入力の時刻歴$\ddot{u}(t)$および鉛直方向の加速度入力の Auto PSD 関数$S_{vv}(\omega)$を指定した下で，最悪な位相差を有する上下方向入力の時刻歴波形を導出する。$S_{vv}(\omega)$は，2.0Hz の正弦波(スパン長 24m の平面骨組における鉛直方向固有振動数は 0.884Hz)のフーリエ振幅スペクトルから得られるものを適用し，$S_{vv}(\omega)$のパワーは水平方向入力の Auto PSD 関数$S_{uu}(\omega)$のパワー$\overline{S}_u$の 1/3 とする(図 3-25)。

本極限外乱理論において得られる最悪な Cross PSD 関数$S_{uv}(\omega)$は, 振動数および時間(=2 乗平均応答を定義する時刻)の関数であるため，時刻tに応じて Cross PSD 関数の特性が変化する。しかしながら, 各方向の入力のフーリエ位相角と Cross PSD 関数の関係から 1 方向入力の時系列波形が与えられたもとで他方向の時系列波形を導くうえで，Cross PSD 関数の時間変化を扱うことはできない。従って，任意の時刻$\hat{t}$における Cross PSD 関数$S_{uv}(\omega,\hat{t})$を適宜用いることによりその Cross PSD 関数で特徴付けられる位相特性を有する他方向の入力が得られることになるため, 水平方向入力に対して最悪な位相特性を有する鉛直方向入力は最悪な Cross PSD 関数における時刻tの選定に依存して一意には定まらないと考えられる。

図 3-26 では，2 乗平均応答を定義する時刻$t=0.1s$，$10s$および$20s$における最悪な Cross PSD 関数$S_{uv}(\omega)$を図示したもので，時刻ごとに Cross PSD 関数の形状が変化していることが確認できる。

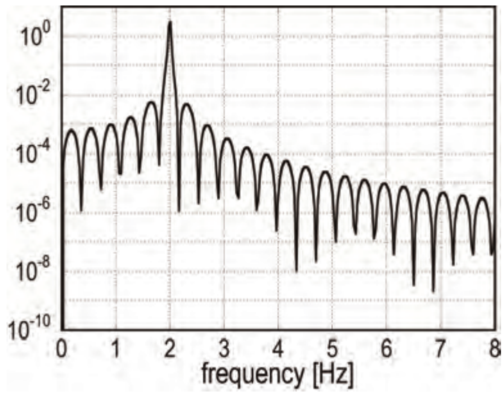


図 3-25 鉛直方向ターゲット Auto PSD 関数(卓越振動数=2.0Hz)

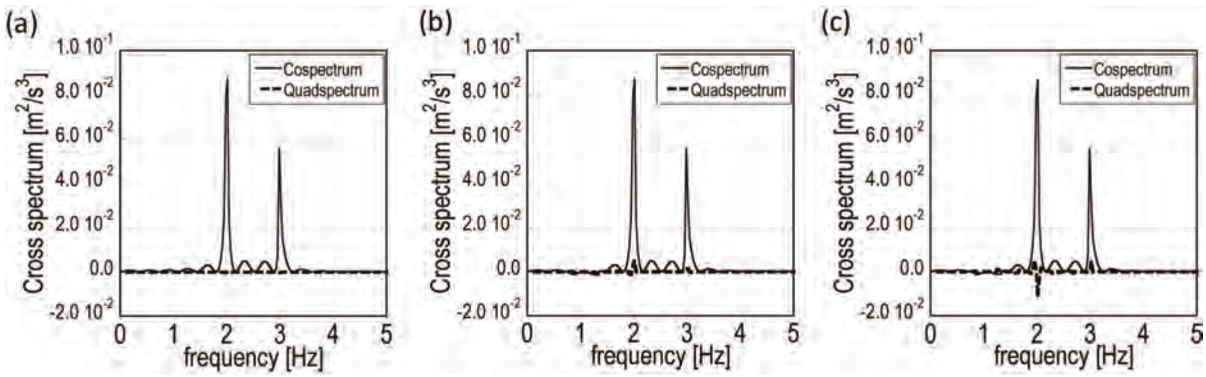


図 3-26 最悪な Cross PSD 関数の時刻tによる違い (a) $t=0.1s$, (b) $t=10.0s$, (c) $t=20.0s$

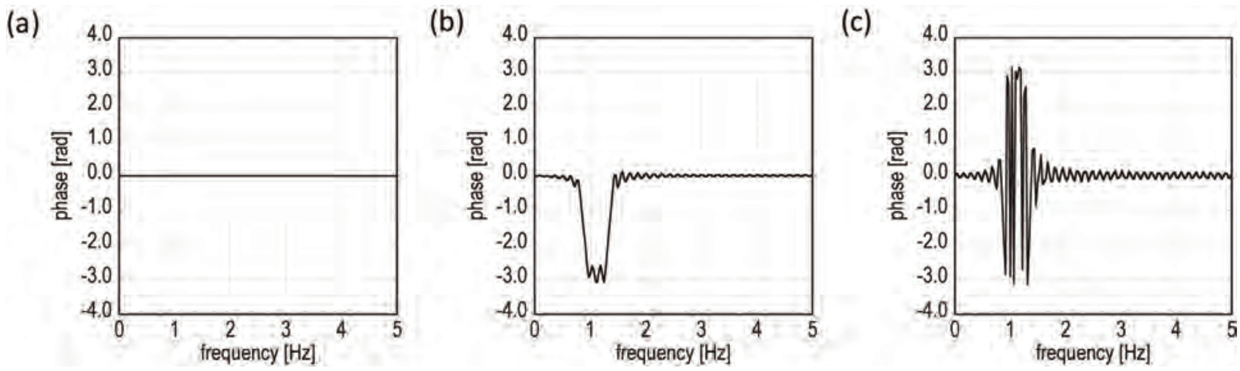


図 3-27 最悪な Phase の時刻tによる違い (a) $t=0.1s$, (b) $t=10.0s$, (c) $t=20.0s$

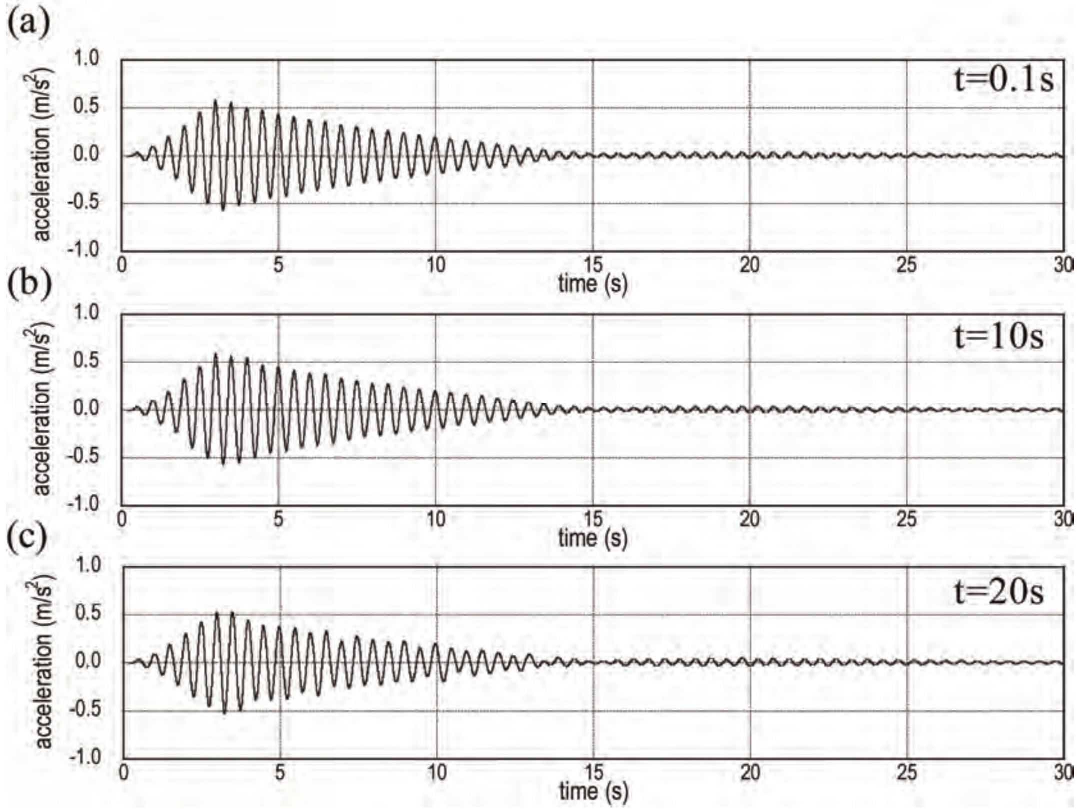


図 3-28 最悪な Cross PSD 関数から得られる鉛直方向入力
(a) $t=0.1s$, (b) $t=10.0s$, (c) $t=20.0s$

また，図 3-27 は，図 3-26 に示した Cross PSD 関数の位相角(Phase)を示したものである。前述したように Cross PSD 関数の位相角は，各方向の入力成分の位相角の差を与えるので，図 3-24 および図 3-27 から鉛直方向入力の位相角が一意に定まる。図 3-27 より，2 乗平均応答を定義する時刻に応じて Cross PSD 関数の Phase は，異なる様相を呈している。2 乗平均応答を定義する時刻$t=0.1s$では，Cross PSD 関数の Phase は全周波数にわたってほぼ 0 であり，鉛直方向入力の位相角は，水平方向入力の位相角と等価なものとして与えられる。一方，$t=10.0s$および$t=20.0s$では，1Hz から 1.5Hz にかけて Cross PSD 関数の Phase が大きく変化している。これは各方向の固有振動数(水平：1.35Hz，鉛直：0.88Hz)と関連付けられており，入力のパワーが卓越する振動数域（ここでは 3.0Hz や 2.0Hz)とは無関係に表れるものである。

図 3-28 は, 最悪な Cross PSD 関数から得られた Phase を用いて鉛直方向入力の位相角を指定した上で逆フーリエ変換して得られる定常振動成分に対して包絡関数を乗じた時刻歴波形を図示したものである。最悪な Cross PSD 関数を用いて他方向の入力の位相角を操作したとしても, Auto PSD 関数(＝フーリエ振幅スペクトル)そのものには影響を及ぼさない。従って，Auto PSD 関数が等しい場合であっても，振動数域での位相特性が異なれば時系列の波形形状には差異が生じる。しかしながら，図 3-28 を見る限りにおいては，Y 方向の入力波形に明確な差は見られない。

図 3-21 に示した水平方向入力とこれらの鉛直方向入力の組み合せに対する応答性状を比較するため, 各方向の入力に対する曲げモーメント応答とそれらの和の時刻歴を図 3-29 に示す。同図中では, 曲げモーメント和が最大となる時刻の周辺の各方向の曲げモーメント応答の時刻歴の詳細も示している。図 3-29 から，鉛直方向の入力波形に依存して応答性状が大きく異なることが確認できる。

表 3-4 では各方向の曲げモーメント応答の最大値，曲げモーメント和の最大値，SRSS 応答および絶対値和応答(各方向の最大値の和)をまとめている。多成分入力地震動を受ける構造物の部材応力に対して最悪なシナリオの観点からすれば，各方向の最大応答(例えば，変位や曲げモーメント)の同時

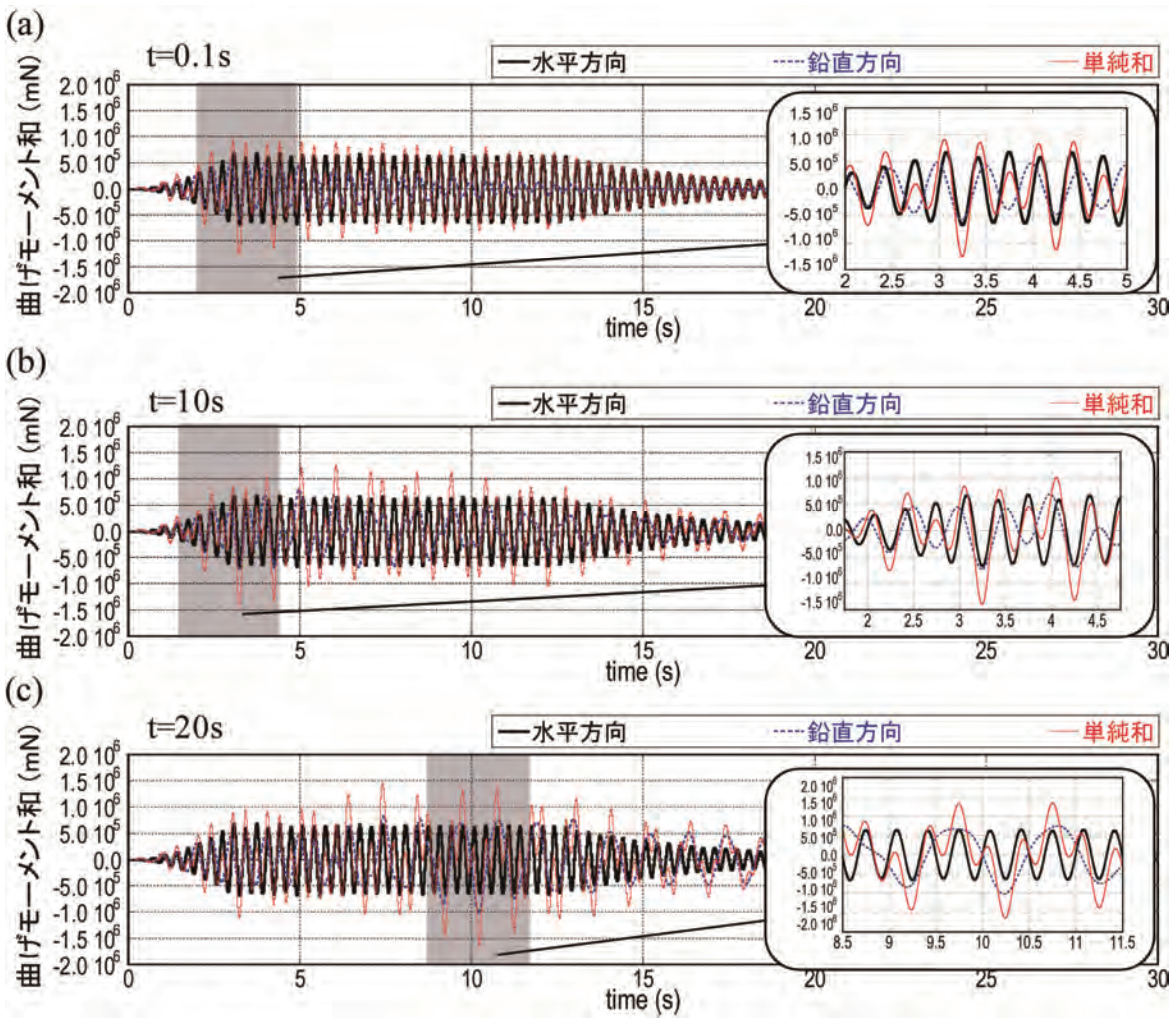


図 3-29 最悪な位相特性を有する極限外乱に対する変位応答波形

(a) 2 乗平均応答を定義する時刻 t=0s, (b) t=10.0s, (c) t=20.0s

表 3-4 各方向の最大曲げモーメントの比較(単位：N・m)

	水平	上下	水平＋上下	SRSS	絶対値和
$\{S_{uv}(\omega,\hat{t});\hat{t}=0s\}$	6.88×10^{5}	5.75×10^{5}	1.24×10^{6}	8.97×10^{5}	1.26×10^{6}
$\{S_{uv}(\omega,\hat{t});\hat{t}=10s\}$		7.92×10^{5}	1.40×10^{6}	1.05×10^{6}	1.48×10^{6}
$\{S_{uv}(\omega,\hat{t});\hat{t}=20s\}$		1.02×10^{5}	1.64×10^{6}	1.23×10^{6}	1.71×10^{6}

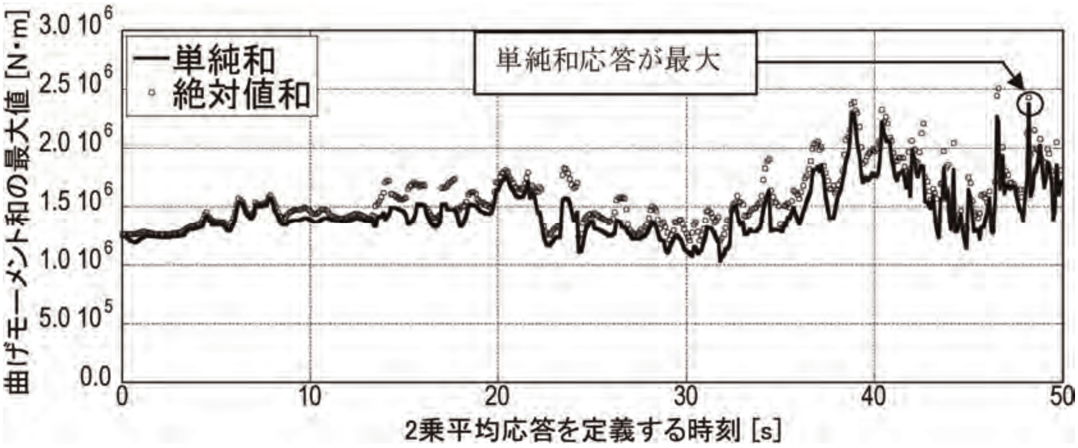


図 3-30 最悪な相関性を有する極限外乱入力を受ける平面骨組の梁端部曲げモーメント和の最大値の 2 乗平均応答を定義する時刻に対する変化

性がクリティカルである。例えば，水平および鉛直応答の単純和の最大値が，絶対値和応答と一致すれば，各方向の最大応答が同時刻に生じていることを意味する。改めて図 3-29 および表 3-4 を見ると，水平および鉛直変位応答の単純和の最大値は，絶対値和応答には及ばないものの，絶対値和応答に近い応答レベルとなっていることが確認できる。従って，本極限外乱理論に基づいて得られた最悪な入力の組み合せは，最大応答の同時性を生み出す最悪なシナリオを生じさせていると考えられる。

これまでの結果から，2 乗平均応答を定義する時刻で得られる最悪な Cross PSD 関数の違いにより水平方向と鉛直方向の入力の位相関係が異なることに起因して, 曲げモーメント和の最大値は 2 乗平均応答定義する時刻に対して変化しているといえる。そこで，図 3-30 では，2 乗平均応答を定義する時刻ごとに最悪な位相差を有する鉛直方向入力を生成し, 水平および鉛直同時入力を受ける平面骨組の梁端部曲げモーメント和の単純和応答および絶対値和応答を比較する。図より，2 乗平均応答を定義する時刻によって極限応答には大きなばらつきが見られる。また，単純和応答と絶対値和応答がほぼ対応しており, 絶対値和応答に対する単純和応答の比率の平均値は 0.927 となっている。これは, 各方向の最大応答値がほぼ同時刻に生じていることを意味しており, 最悪位相差入力により最大応答の同時性が実現されていることを示唆している。

図 3-30 より 2 乗平均応答を定義する時刻 $t=48.3s$ において梁端部曲げモーメント和は，最大となっている。そこで，図 3-31 では，$t=48.3s$ における入力波形の組み合せおよびその入力波に対する各方向の曲げモーメント応答の時刻歴を示す。図 3-28 および図 3-31 を比較すれば，図 3-31 に示した鉛直方向入力($t=48.3s$)は，図 3-28 に示した鉛直方向入力と比べて最大振幅値が大きく，振幅一定領域の継続時間が長いといえる。これは，包絡関数を乗じる前の段階における定常振動成分 $w(t)$ の

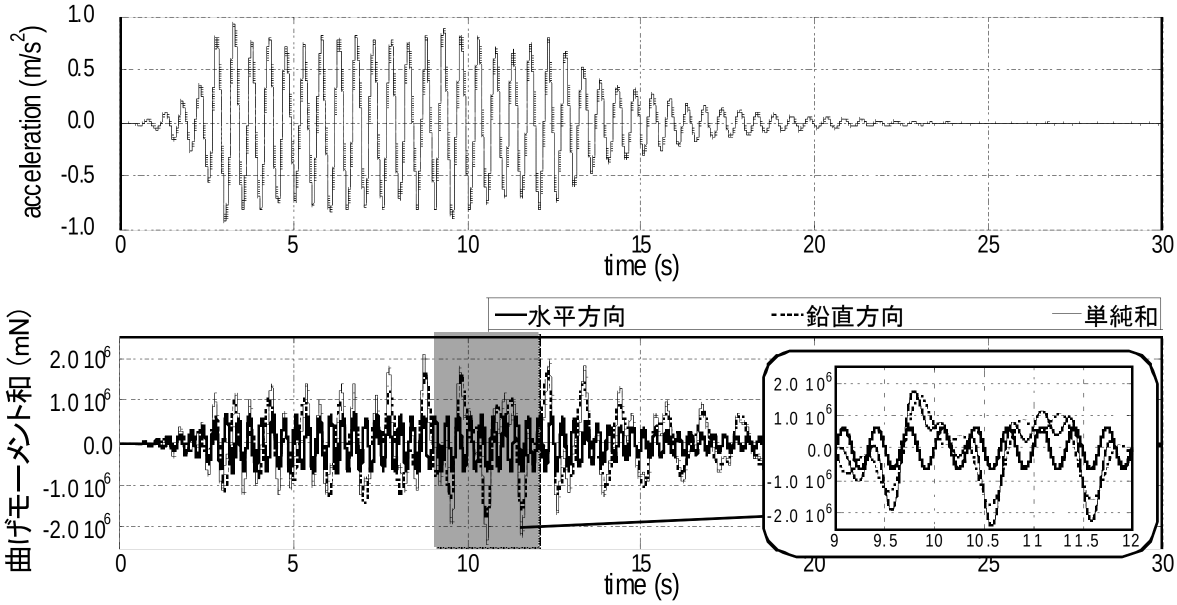


図 3-31 2 乗平均応答を定義する時刻 t=48.3s における最悪な位相差を有する鉛直方向入力と各方向の梁端部曲げモーメント応答の時刻歴

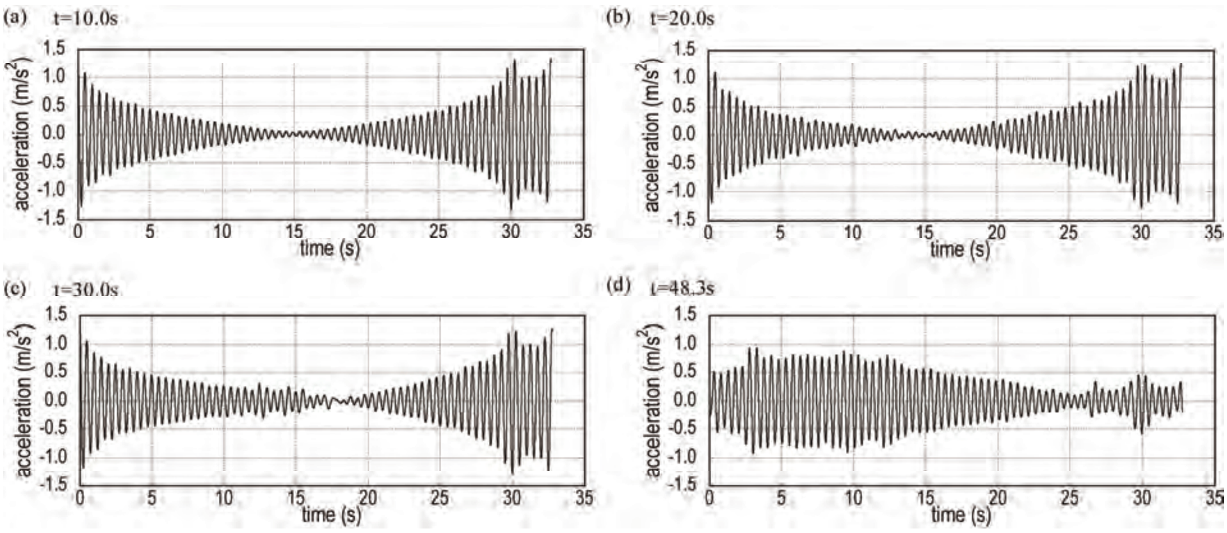


図 3-32 2 乗平均応答を定義する時刻に対する最悪位相差を有する定常振動成分 $w(t)$ の比較

(a) $t=10.0s$, (b) $t=20.0s$, (c) $t=30.0s$, (d) $t=48.3s$

違いにより現れるもので，図 3-32 では 2 乗平均応答を定義する時刻 $t=10.0s, 20.0s, 30.0s$ および $48.3s$ における $w(t)$ を図示している。図より，定常振動成分として扱う $w(t)$ においても位相角を操作することにより振幅に非定常性が見られる。図 3-32(a), (b), (c)では $w(t)$ が最大となる時刻が $t=30.0s$ 付近であるのに対して，図 3-26(d)では $t=3.06s$ となっている。実際に構造物に作用させる入力外乱 $\ddot{u}(t)$ は，$w(t)$ に包絡関数 $c(t)$ を乗じたものであり，$w(t)$ および $c(t)$ が最大となる時間領域が一致した場合には入力外乱 $\ddot{u}(t)$ の振幅レベルが増大する。以上のことから，2 乗平均応答を定義する時刻により求められる Cross PSD 関数に応じた $w(t)$ の変化について留意する必要がある。

3.6.2　現実的な地震動外乱に対する最悪位相差入力

<u>記録地震波の定常振動成分の抽出</u>

前項では特定の卓越振動数の正弦波で構成される確定的な入力外乱の組み合せを想定したうえで，Auto PSD 関数を指定した問題を扱っていた。多軸応力状態下にある部材にとって各方向の応答の最大レベルが同時に生じる現象(最大応答の同時性)をクリティカルな状態とみなすことができ，本極限外乱理論に基づいて最悪位相差を有する他方向入力を見出すことが可能であることを実証した。しかしながら，前項で扱っていた入力外乱は単一の卓越振動数の正弦波を扱っているため入力の定常性が強く，1 方向の成分に関して応答の時刻歴では周期的に最大応答値が励起されていた。従って，定常振幅となる継続時間が長い場合には必然的に各方向の最大応答が同時刻に生じるため，最悪位相差を考慮した本極限外乱理論の優位性を示したとは言い難い。

本項では現実的な記録地震波におけるフーリエ振幅スペクトルに基づいて得られる Auto PSD 関数を用いて，確定的な入力に対する最悪位相差を有する極限外乱の生成について検討する。すなわち，観測された記録地震波の水平方向入力 1 成分に対して，対象とする構造物の部材応力を最大化する最悪位相差特性を有する他方向入力(直交する水平成分や鉛直方向成分)の導出方法について論じる。

対象とする建物モデルは前節と同様とし，構造物の諸元については表 3-1 に記す。これまでに展開してきた本極限外乱理論においては，確率論に基づく非定常入力地震動モデルとして入力外乱は定常振動成分項 $w(t)$ と包絡形状を与える包絡関数 $c(t)$ の積で与えられるものとしてきた。従って，本極限外乱理論を確定的な記録地震波に適用するためには，時系列波形の記録地震波の成分から $w(t)$ および $c(t)$ に相当する成分をそれぞれ抽出する必要がある。例えば，記録地震波 El Centro NS(1940)に対して包絡関数形状を指定した上で，時系列成分に対してベストフィットさせ $c(t)$ を解析的に導けば図 3-33 を得る。$c(t)$ の導出方法に関する詳細については Appendix に記す。

図 3-33 で得られた包絡関数の逆数を元の地震波の加速度成分に乗じることにより，記録地震波 $\ddot{u}_g(t)$ の定常振動成分 $w(t)$ を見出すことが可能である(図 3-34)。また，図 3-35(a)では，図 3-34 で得られた El Centro NS (1940)の定常振動成分 $w(t)$ をフーリエ変換することで得られた Auto PSD 関数を図示している。また，図 3-35(b)では，包絡関数の逆数を乗じる以前の El Centro NS (1940)の原波のフーリエ変換から得られる Auto PSD 関数を示している。これらの Auto PSD 関数を比較すれば，定常振動成分に対する Auto PSD 関数は，原波の Auto PSD 関数に比べて長周期の成分が多く周波数特性

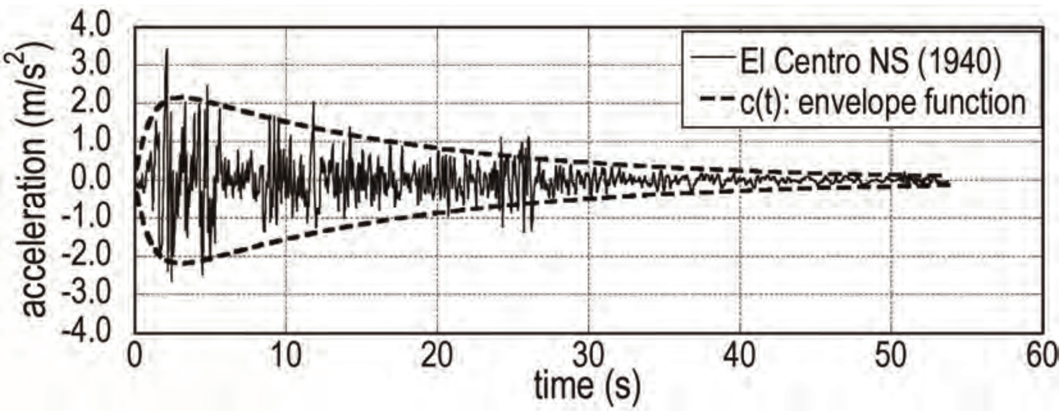


図 3-33 El Centro NS (1940)原波と適合させた包絡関数の比較

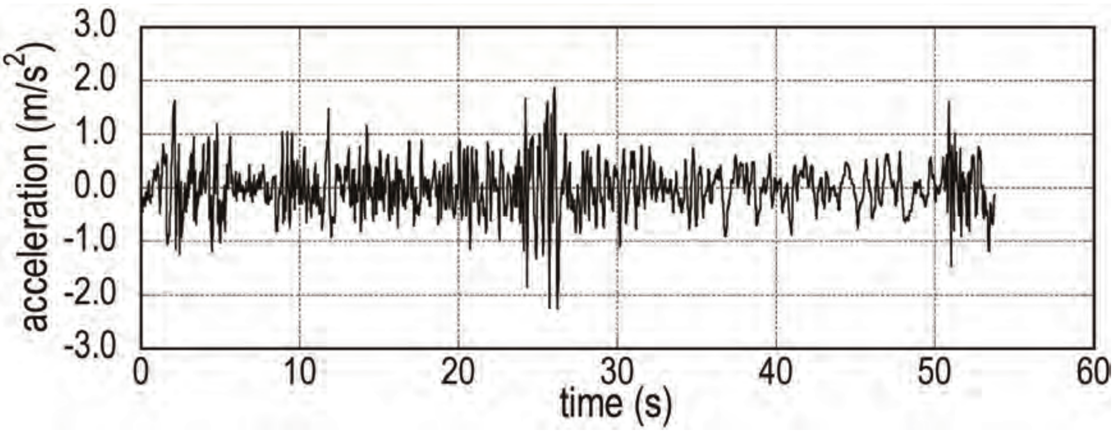


図 3-34 El Centro NS (1940)から抽出した定常振動成分

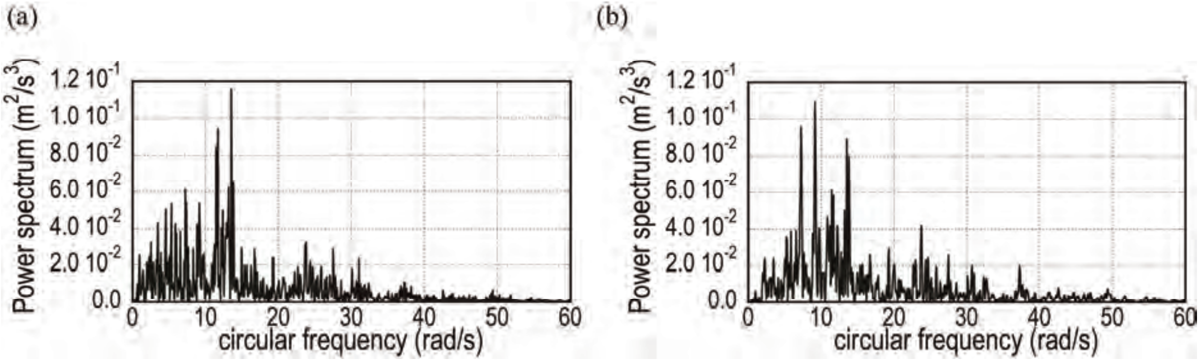


図 3-.35 El Centro NS (1940)の Auto PSD 関数の比較

(a) 定常振動成分, (b) 原波

の変化が見られる。これは包絡関数の逆数を乗じることで，原波で振幅レベルが小さい時間領域における後半の波形の振幅レベルが増大するためである。

本極限外乱理論に基づいて最悪な Cross PSD 関数を見出すためには各方向の Auto PSD 関数を指定する必要がある。まず水平方向入力の Auto PSD 関数については，図 3-35(a)で与えるものとする。また，図 3-34 に示した El Centro NS(1940)の $w(t)$ をフーリエ変換する過程で当該方向の位相スペクトルを得ることが可能である。

一方，鉛直方向入力の Auto PSD 関数についてもあらかじめ規定する必要がある。ここでは現実的な地震動を対象とするための一例として, El Centro UD (1940)の Auto PSD 関数を水平方向の Auto PSD 関数を評価した方法と同様な手順で導く。図 3-36 は，El Centro UD(1940)に最適な包絡関数を解析的に求めたうえで，その逆数を乗じて得られる定常振動成分を示したものである。また同図中には El Centro UD (1940)の原波も比較のため示している。図 3-36 より，包絡関数の逆数を乗じることにより時系列の後半部分の振幅レベルが増大されていることが分かる。観測された地震波は，時系列の後半では長周期成分が卓越した表面波が支配的に表れることがあり，地震動の振動数特性(＝スペクトルの卓越振動数や形状)にも経時変化が見られることが知られている。従って，図 3-36 に示すように時系列の後半部分の成分は，本来の鉛直方向入力が有する振動数特性とは異なることが考えられる。このような場合に, 包絡関数の逆数を乗じて得られた定常振動成分の全成分をフーリエ変換することで Auto PSD 関数を評価すると Auto PSD 関数のパワーが飛躍的に大きくなることが問題になる。

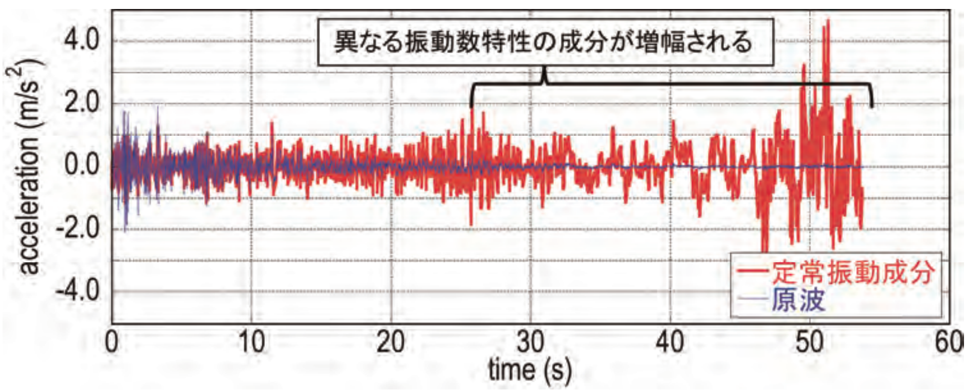


図 3-36 El Centro UD(1940)の原波と定常振動成分の比較

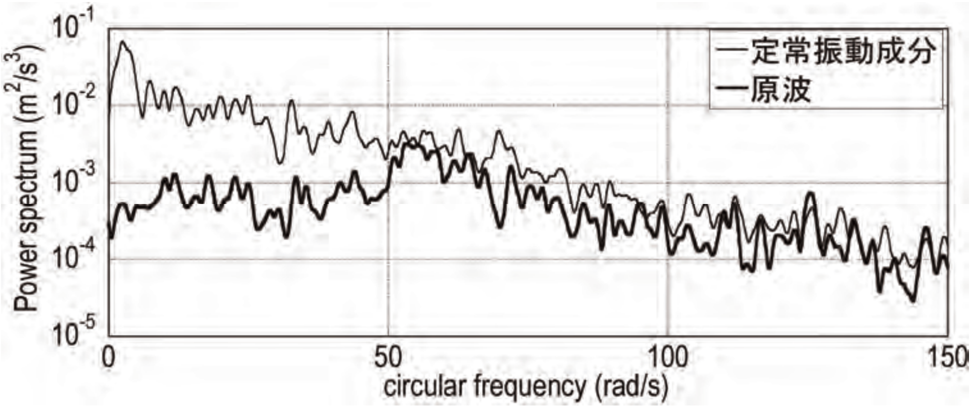


図 3-37 El Centro UD(1940)の定常振動部の全成分に対する Auto PSD 関数

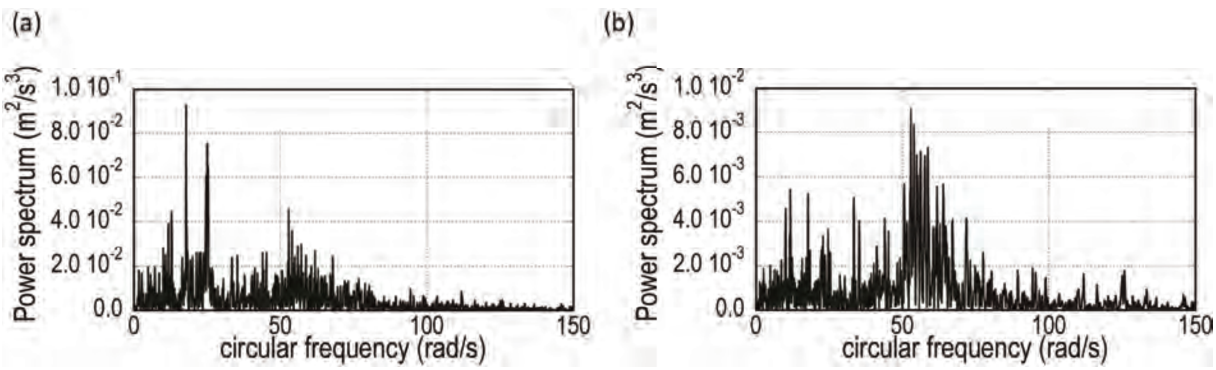


図 3-38 El Centro UD (1940)の Auto PSD 関数の比較

(a) 定常振動成分(0.0s-26.0s), (b) 原波

図 3-37 は, 図 3-36 で得られた El Centro UD (1940)の定常振動部の全成分に対する Auto PSD 関数と原波の Auto PSD 関数を比較したものである(いずれもスペクトル平滑化を行い，縦軸は対数軸)。図 3-37 より，El Centro UD (1940)の定常振動部の全成分に対する Auto PSD 関数では，長周期成分が卓越し，振動数特性の経時特性による非定常性が顕著に現れていることが確認できる。本極限外乱理論における非定常入力地震動モデルでは，入力の振動数特性の経時変化を想定していないため，仮に図 3-37 で得られた Auto PSD 関数を鉛直方向入力の Auto PSD 関数として採用した場合には，逆フーリエ変換して得られる時刻歴成分の全時刻にわたって長周期成分の影響を無視することができない。

ここでは，前述のような問題を回避するため，図 3-36 において時刻 0.0s から 26.0s(時系列の前半

部分)の定常振動成分から鉛直方向地動成分の Auto PSD 関数を導出することにする。図 3-38 は，El Centro UD (1940)の定常振動成分(0.0s-26.0s)の Auto PSD 関数と全継続時間の El Centro UD (1940)原波に対する Auto PSD 関数を比較したものである(いずれもスペクトル平滑化は行わない)。以降では，図 3-38(a)で得られた Auto PSD 関数を鉛直方向入力の Auto PSD 関数として用いる。

<u>最悪位相差を有する極限外乱の生成</u>

ここまでで記録地震波の定常振動成分に対する各方向の Auto PSD 関数を規定した。前節で扱った正弦波入力の数値例にみられたように，本極限外乱理論により得られる最悪位相差特性を与える Cross PSD 関数は，2 乗平均応答を定義する時刻に応じてその特性が変化する(例えば，図 3-30)。そこで，図 3-39 では，2 乗平均応答を定義する時刻ごとに最悪な Cross PSD 関数を見出した上で，El Centro NS(1940)に対して最悪位相差を有する鉛直方向入力を生成し，極限外乱に対する極限応答(=水平および鉛直方向の梁端部曲げモーメント応答和の時刻歴最大値)の変化を図示している。また，同図中には，各方向の梁端部曲げモーメント応答の最大値の和(絶対値和)を比較のため図示している。なお，建物モデルは前節までと同様でスパン長 $L = 24m$ の 1 層 1 スパン平面骨組を扱う (表 3-2)。

図 3-39 より，2 乗平均応答を定義する時刻によって極限応答にばらつきが見られるが，ばらつきの度合いは前節の数値例に比べて小さい(図 3-30 参照)。また，絶対値和応答に対する単純和応答の比率の平均値は 0.821 となっており，前節の数値例に比べて最大応答の同時性を実現できていない。しかしながら, 2 乗平均応答を定義する時刻が 0 ~10s の一部では絶対値和応答に対する単純和応答の比率が 0.95 を超えており，水平および鉛直方向の最大応答の同時性が見られる。

図 3-39 において梁端部曲げモーメント和(＝単純和)の最大値を与える 2 乗平均応答を定義する時刻は， $t = 2.6s$ である。また， $t = 9.7s$ においても単純和の最大値とほぼ等しい結果が得られている。そこで，図 3-40，図 3-41，図 3-42 および図 3-43 では， $t = 2.6s$ ， $t = 9.7s$ における最悪な Cross PSD 関数の実部 Co-spectrum および虚部 Quad-spectrum，水平方向と鉛直方向の位相差(フェイズ)，入力波形の組み合せおよびその入力波に対する各方向の曲げモーメント応答の時刻歴をそれぞれ図示する。また，比較のため，図 3-42，43 では， $t = 0.1s$ についても図示する。

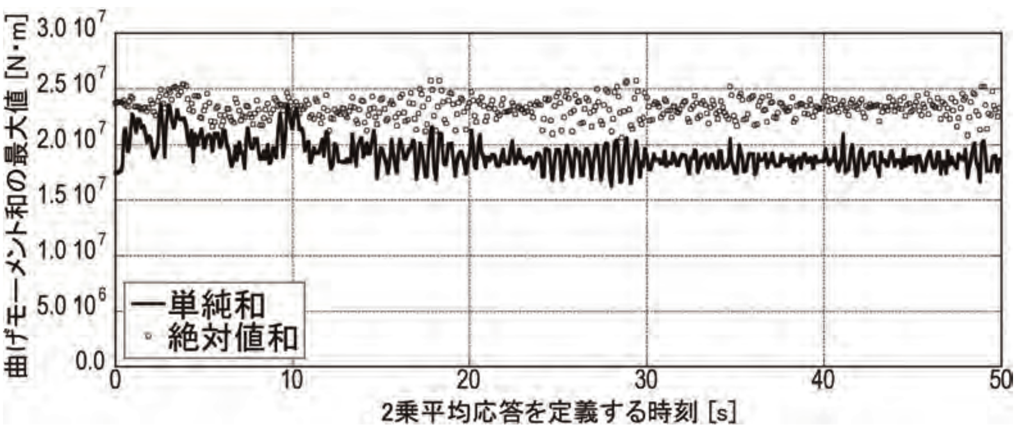


図 3-39 最悪な相関性を有する極限外乱入力を受ける平面骨組の梁端部曲げモーメント和の最大値の 2 乗平均応答を定義する時刻に対する変化(Auto PSD 関数を El Centro NS & UD (1940)で規定)

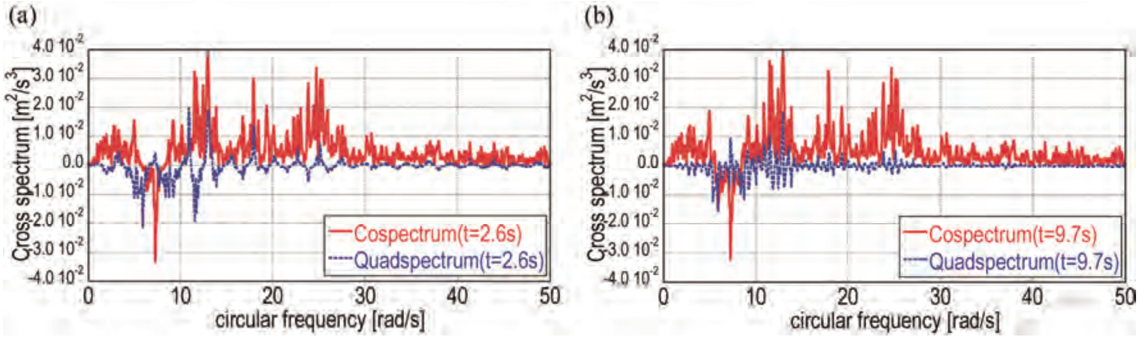


図 3-40 最悪な Cross PSD 関数(Co-spectrum, Quad-spectrum)

(a) 2 乗平均応答を定義する時刻=2.6s, (b) 同左=9.7s

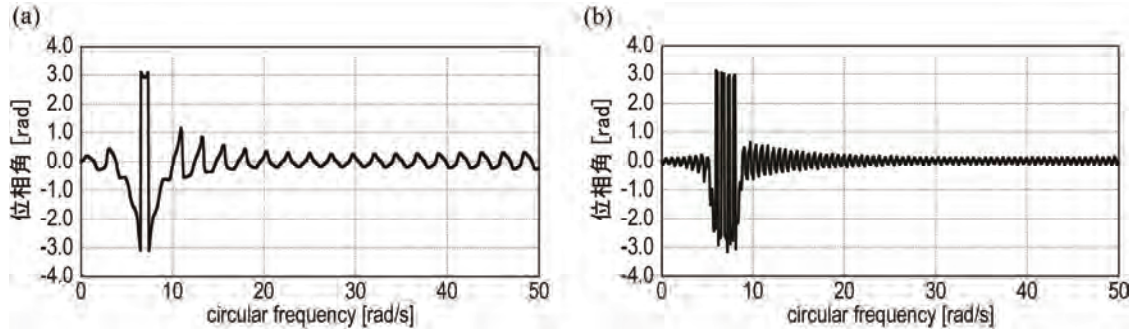


図 3-41 最悪な Cross PSD 関数による水平および鉛直方向入力の位相差(Phase)

(a) 2 乗平均応答を定義する時刻=2.6s, (b) 同=9.7s

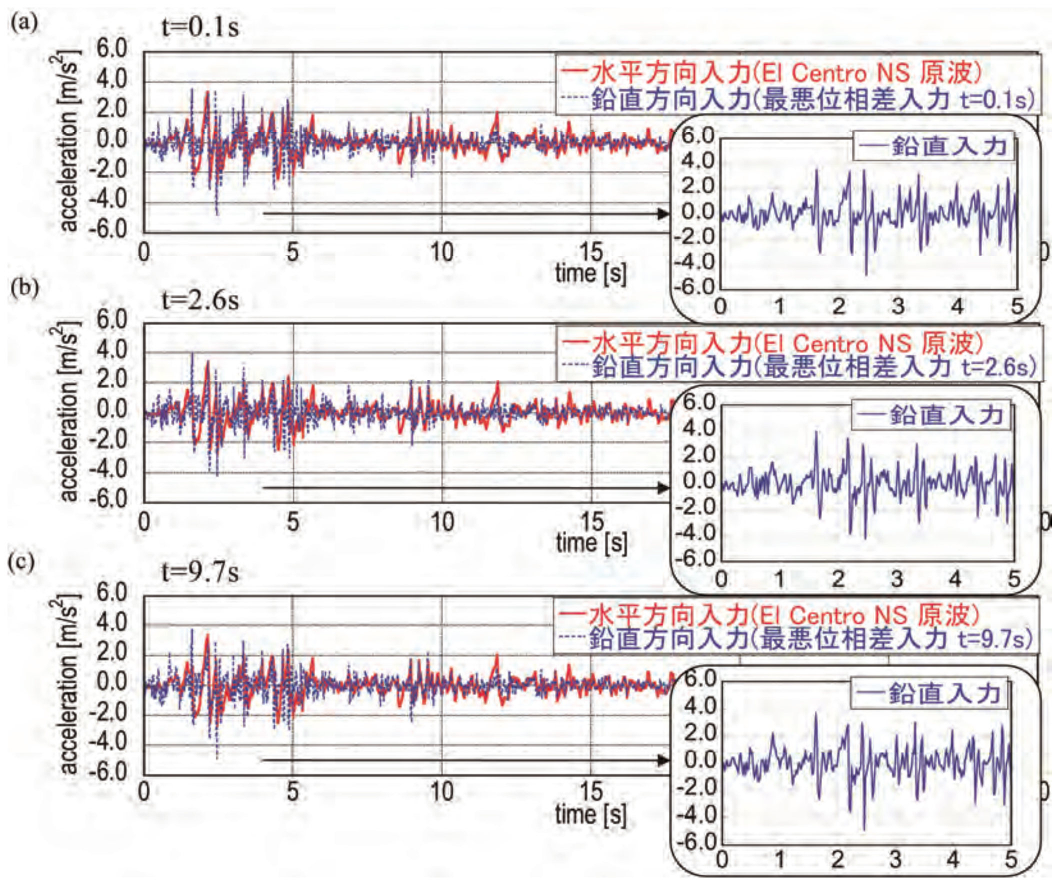


図 3-42 最悪な Cross PSD 関数から得られる極限外乱 (a) $t = 0.1s$, (b) $t = 2.6s$, (c) $t = 9.7s$

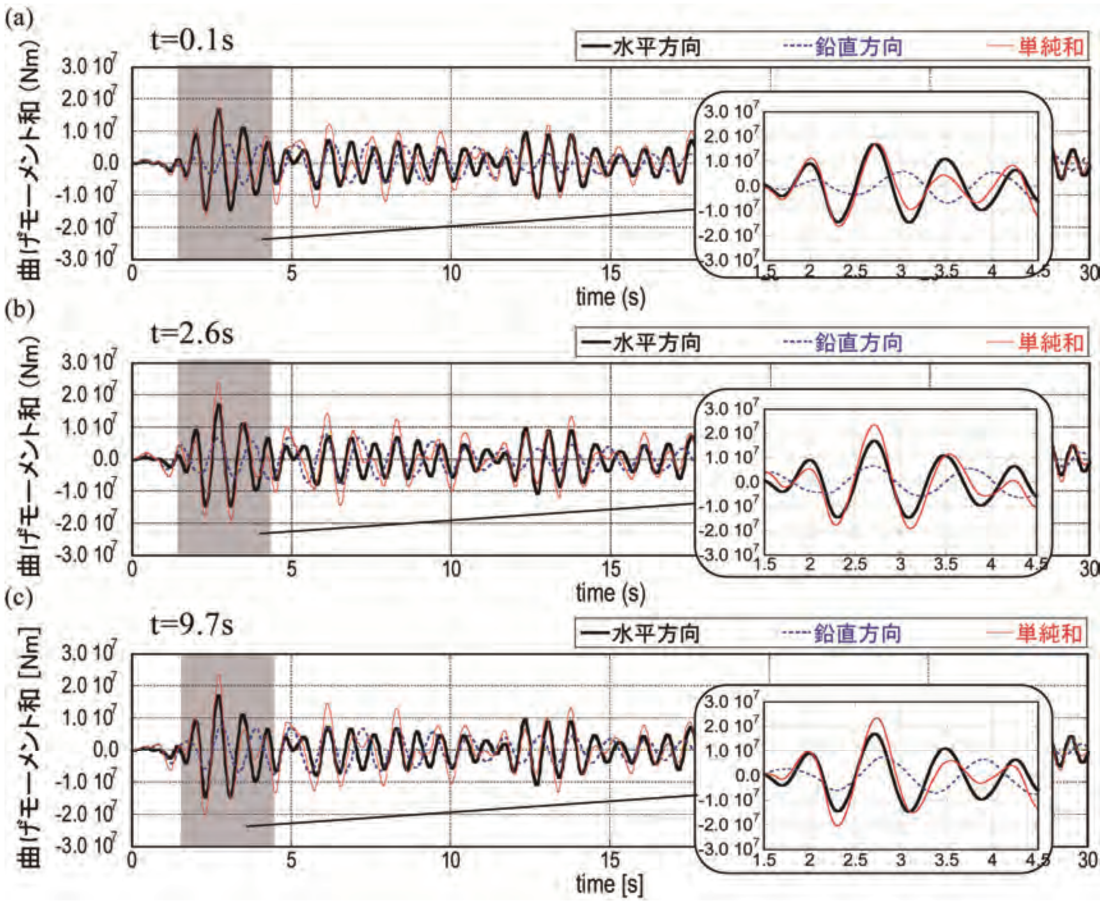


図 3-43 極限外乱に対する梁端部曲げモーメント和の時刻歴応答の比較

(a) $t = 0.1s$, (b) $t = 2.6s$, (c) $t = 9.7s$

図 3-41 より，構造物の各方向の固有円振動数付近で，水平および鉛直方向入力の位相差に大きな変化が見られる。一方，入力外乱が卓越する振動数付近やその他の領域では位相差の変化が乏しく，鉛直方向入力の位相角は，水平方向入力(=El Centro NS (1940)原波)の位相角とほぼ対応したものとして与えられると考えられる。次に，図 3-43 に示した最悪な位相差特性を有する水平および鉛直方向入力の極限外乱を比較すれば，2 乗平均応答を定義する時刻によって水平方向入力に対する鉛直方向入力の位相差に違いがあるにもかかわらず，鉛直方向入力の時刻歴波形に大きな差異は見られない。これは, 構造物の各方向の固有円振動数に対応した特定の振動数域のみで位相差の操作が行われているため, 様々な振動数特性を有する鉛直方向入力の時刻歴波形において有意な違い見出すことが困難であることに起因する。しかしながら，図 3-37 においてこれらの最悪な位相差特性を有する極限外乱に対する極限応答を比較すれば，2 乗平均応答を定義する時刻$t = 0.1s$の場合には，水平方向応答が最大となる時刻において鉛直方向応答はほぼ 0 となっており，単純和の応答レベルが低い。一方，$t = 2.6s$および$t = 9.7s$では，各方向の最大応答値が生じる時刻は異なるものの，水平方向応答が最大となる時刻において，鉛直方向応答もほぼピークとなっていることが確認できる。このため，$t = 0.1s$では梁端部曲げモーメント和の最大応答値が 1.74×10^7[N・m]であるのに対して，$t = 2.6s$では 2.36×10^7[N・m]となっており，後者の応答量は前者に比べて 1.356 倍になっている。以上のことから，入力の位相差のわずかな違いが構造物応答に大きく影響を及ぼすことが明らかになり，本極限外乱理論の有用性を示した。

ランダム位相差入力に対する応答群との比較

これまでは，2 乗平均応答定義する時刻ごとの Cross PSD 関数により定まる水平および鉛直方向入力の位相差を用いて鉛直方向入力を求め，極限応答の性状について分析した。本項では，水平方向入力の時系列成分を El Centro NS (1940)の原波で固定したもとで，前項で用いた鉛直方向入力の Auto PSD 関数(図 3-38(a)参照)のもとで, 位相角をランダムに変動させた地震動群に対する梁端部曲げモーメント和の最大応答を評価し，前項で得られた極限応答の位置づけを明らかにする。

図 3-44 は，水平方向入力に対する鉛直方向入力の位相差をランダムに変動させたて得られる水平上下同時入力に対する梁端部曲げモーメント和(=単純和応答)の最大値の分布を図示したものである。モンテカルロシミュレーション(MCS)の試行回数は 10000 回とし，横軸は梁端部曲げモーメント和応答の SRSS 応答に対する絶対値和応答の比とした。また，同図中には，前項で得られた 2 乗平均応答を定義する時刻 $t = 2.6s$ における最悪位相差を考慮した極限応答を記している。図より，極限応答を上回るサンプルがいくつか散見される。MCS における評価関数の最大値は, 2.69×10^7[N・m]であり，極限応答値 2.36×10^7[N・m]に比べて 14%程度大きい。図 3-45 では，MCS で得られた応答値の累積分布関数を示している。図 3-45 より，極限応答を上回ったサンプル数(図 3-44 でグレーの領域に存在するサンプル)は MCS の試行回数に対して 1%未満であることがわかる。このことから，多数回の応答解析を必要とする MCS を実施することなく，多次元入力地震動を受ける構造物の部材応力の上限

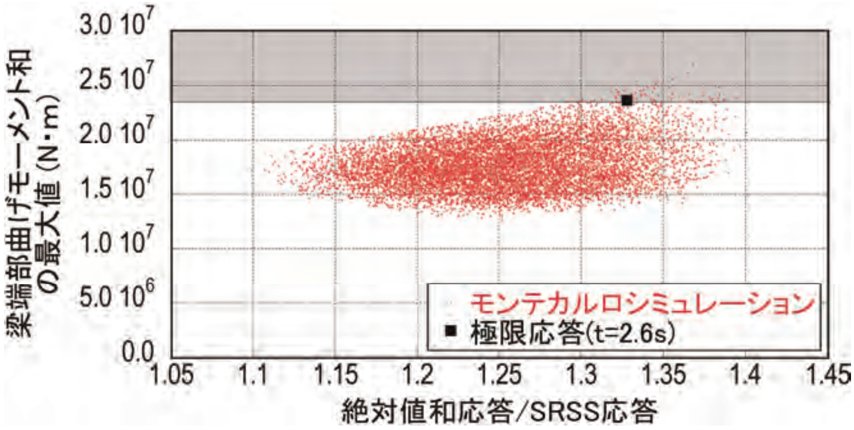


図 3-44 MCS による梁端部曲げモーメント和の最大値分布と極限応答の比較

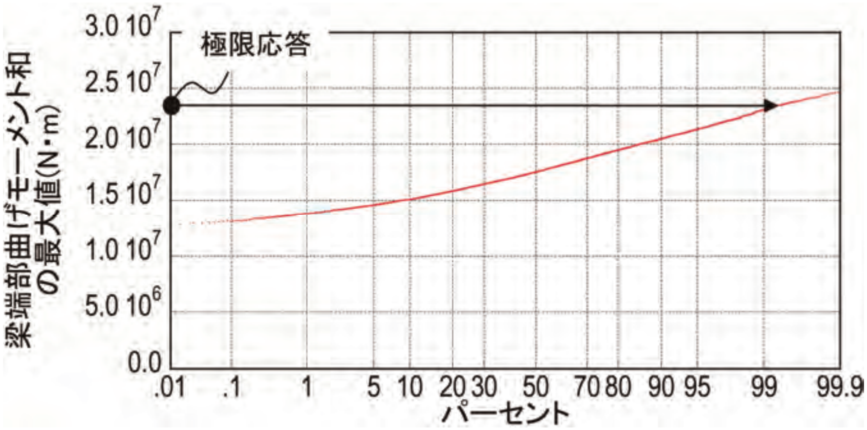


図 3-45 MCS による梁端部曲げモーメント和の累積分布関数(パーセント表記)

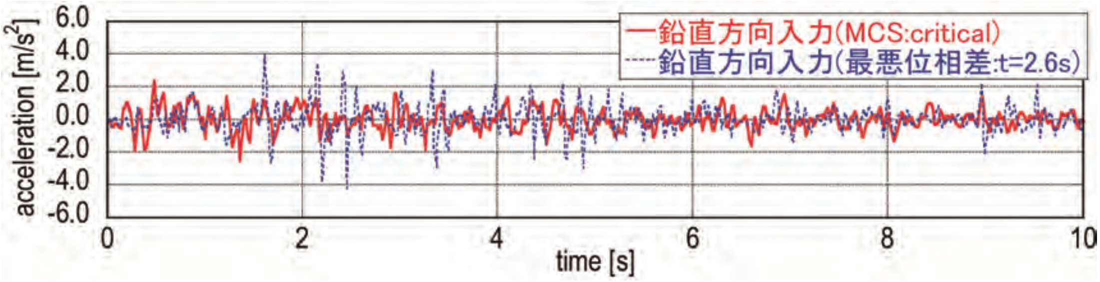


図 3-46 MCS による最大応答値を与える鉛直方向入力と極限入力の比較

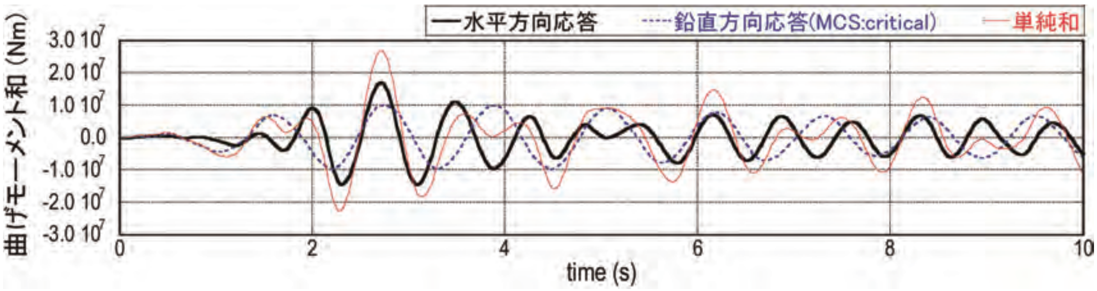


図 3-47 MSC による最大応答値を記録したサンプルにおける水平および鉛直方向の
梁端部曲げモーメント応答時刻歴

値を評価するうえで, 最悪な位相差特性を見出す本極限外乱法により得られた極限応答は有効である。

図 3-46 では，図 3-44 の MCS で得られた梁端部曲げモーメント和の最大応答値 2.69×10^7[N・m]を与える鉛直方向入力について図示した。比較のため，前項で得られた 2 乗平均応答を定義する時刻 $t=2.6s$ における最悪位相差特性を有する鉛直方向入力についても同図中に記した。また，図 3-47 では, 図 3-46 に示した MCS により得られた鉛直方向入力に対する梁端部曲げモーメント応答の時刻歴を図示したものである。図より，水平および鉛直方向の応答がほぼ同時刻に最大化されていることが確認できる。

3.6　結論

本章では，対象とする地震動外乱群の地動加速度の Auto PSD 関数を規定せず，任意の振動数特性を有する Auto PSD 関数を与えるモデルフリー地震動を新たに定義した。水平および上下同時入力を受ける平面骨組における梁端部曲げモーメント和応答に関する極限外乱問題において, モデルフリー地震動に対する極限外乱の特性を分析した。さらに本極限外乱理論に基づいて得られる最悪な Cross PSD 関数を用いて，確定的な入力に対する最悪位相差を有する極限外乱の組み合せを見出す方法を提示し，本極限外乱理論の有用性を明らかにした。本章において得られた結論を以下にまとめる。

1) 水平上下同時入力の相関関係に関する極限外乱問題の拡張

水平上下同時入力地震動を受ける平面骨組において梁端部曲げモーメント和の 2 乗平均応答を最大化する最悪な入力外乱特性を見出す極限外乱法を展開した。入力外乱モデルは，包絡関数 $c(t)$ と平均 0 の定常ガウス確率過程に従う確率変数 $w(t)$ の積で与えられる確率論に基づくものとする。確率変数 $w(t)$ は，地動外乱の Auto PSD 関数を与えることによりその特性を指定することが可能である。しかしながら，限界耐力計算における安全限界スペクトルに基づく Auto PSD 関数を与えることは,

対象とする外乱群を限定していることに他ならないため, 起こりうる地震動の不確定性を表現しているとはいえない。そこで，本章では，非定常模擬入力地震動のパラメターである確率変数 $w(t)$ を決定づける Auto PSD 関数が任意の振動数特性を有するモデルフリー地震動で表わされるものとして極限外乱問題を拡張した。

2) モデルフリー地震動のパラメター変動が極限応答に及ぼす影響に関する考察

各方向の地動成分の Auto PSD 関数が矩形 PSD 関数で与えられるものとし, 任意の振動数特性を有する入力地震動モデル(=モデルフリー地震動)を対象とした。モデルフリー地震動では，矩形 PSD 関数の振動数中心位置および振動数バンドを変数とした。建物モデルの水平および鉛直方向の振動数特性とモデルフリー地震動における振動数帯域の関係が極限応答に及ぼす影響について考察を行い, 水平上下同時入力に対する梁端部曲げモーメント和の 2 乗平均応答における相関項を最大化する最悪な振動数帯域の組み合せ，すなわち最悪な Auto PSD 関数の組み合せを見出す方法を提案した。各方向の Auto PSD 関数が矩形で与えられる場合に限れば，各方向の Auto PSD 関数の相乗平均の振動数域での積分値（パワー）を最大化するような最悪な振動数帯域は，水平もしくは鉛直方向の矩形 PSD 関数の振動数帯域が建物モデルの各方向の 1 次固有円振動数の差の 2 倍に等しく, かつ他方向の矩形 PSD 関数の振動数帯域が限りなく小さい時に極大となることを明らかにした。

3) モデルフリー地震動のパラメター変動が極限応答に及ぼす影響に関する解析的検証

水平上下同時入力を受ける平面骨組の梁端部曲げモーメント和について考察を行い，水平および鉛直方向の固有円振動数の組み合せの違いが各方向の入力成分の相関による応答増加に及ぼす影響について各方向の Auto PSD 関数の振動数帯域をパラメターとした数値解析を行った。建物モデルの水平および鉛直方向の固有円振動数が近接するモデルでは, 入力の相関による応答増加の影響が顕著となる最悪な Auto PSD 関数の組み合せが存在することを明らかにした。一方，建物モデルの水平および鉛直方向の固有円振動数が相対的に離れている場合では, 共振作用による応答増加の影響の方がより顕著であるため，入力の相関による応答増加の影響はほとんど見られないことを確認した。従って，建物モデルの固有円振動数が近接する場合には，多成分入力地震動の相関性が応答に及ぼす影響に留意する必要があることを明らかにした。

4) 確定的な 1 入力成分に対する最悪位相差を有する極限外乱入力の生成

本極限外乱理論により得られる最悪な Cross PSD 関数を用いて, 確定的な時系列入力成分に対して最悪な位相差特性を有する極限外乱を見出す方法を提示した。Cross PSD 関数は，各方向の入力成分の位相角の差に相当するものであり, 一方向の入力成分の位相スペクトルが与えられれば他方向の位相スペクトルが一意に定まる。本極限外乱理論に基づいて得られる最悪な Cross PSD 関数は，評価関数を 2 乗平均応答としているため 2 乗平均応答を定義する時刻に応じて異なる。数値例では，特定の卓越振動数の正弦波入力および現実的な記録地震波に対する最悪な位相差特性を有する極限外乱をそれぞれ生成した。いずれの場合においても，2 乗平均応答を定義する時刻によって位相差特性の変化が見られ，変位応答和の最大値にばらつきが生じるが，応答の同時性が強く各方向の変位応答の最大値がほぼ同時刻に生じる。

Appendix　記録地震波に対する包絡関数の導出法

記録地震波から定常振動成分 $w(t)$ および包絡関数 $c(t)$ を抽出する方法について記す。任意の記録地震波に対して最適な包絡関数を定める上で包絡関数の形式をあらかじめ指定する必要がある。包絡関数の形式にはこれまでに様々な提案がなされているが，ここでは次式で与えられるものとする。

$$c(t) = \alpha\left(e^{-\beta t} - e^{-\gamma t}\right) \tag{A-1}$$

ここに α, β, γ は未定係数である。ここでは，対象とする任意の記録地震波 $\ddot{u}_g(t)$ と(A-1)式で与えられた包絡関数との 2 乗誤差が最小となるように α, β, γ を決定する。しかしながら，地震波の全成分に対して 2 乗誤差を評価すると評価点が多くなることに起因してフィッティングの精度が低下する。そこで，記録地震波の成分において隣あった 2 つ同士のデータを比較して大きい値のデータを残し，小さい値を取り除くという作業を繰り返すことで，代表的な極大点を見出した上で，代表的な極大点の集合に対して包絡関数を最小 2 乗誤差最小化によりフィッティングさせる。例えば，El Centro NS(1940)の加速度成分の絶対値に対して代表的な極大点を求めた結果を図 A-1 に示す。ただし，$t = 0.0s$ において $c(t) \approx 0$ となるように記録地震波の加速度成分 $\ddot{u}_g(t_1)$ を代表極大点に追加する。

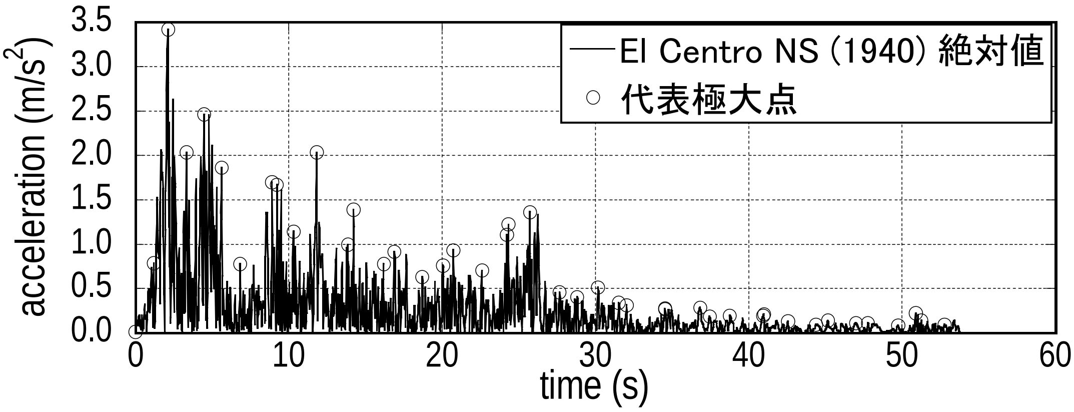


図 A-1 El Centro NS(1940)と代表極大点の抽出

参考文献

Abbas A.M., Manohar, C.S., (2002a). "Investigating into critical earthquake load models within deterministic and probabilistic frameworks", *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.,* **31**(4), pp813-832.

Abbas A.M., Manohar, C.S., (2002b). "Critical spatially varying earthquake load models for extended structures", *J. Struct. Engrg.*, **29**(1), pp39-52.

Abbas A.M., Manohar, C.S., (2007). "Reliability-based vector nonstationary random critical earthquake excitations for parametrically excited systems", *Struct. Safety*, **29**, pp32–48.

Abbas A.M., Takewaki, I., (2009). "The use of probabilistic and deterministic measures to identify unfavorable earthquake records", *J. Zhejiang University- SCIENCE A*, **10**(5), pp619-634.

Drenick R.F., (1970). "Model-free design of aseismic structures", *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE, **96**(EM4), pp483-493.

Fujita K.., Yoshitomi S., Tsuji M., Takewaki I., (2008a). "Critical cross-correlation function of horizontal and vertical ground motions for uplift of rigid block", *Engrg. Structures,* **30**(5), pp1199-1213.

Fujita K.., Takewaki, I., Nakamura N., (2008b). "Critical disturbance for stress resultant in long-span moment-resisting frames subjected to horizontal and vertical simultaneous ground inputs", *J. Struct. Construction Engrg., AIJ,* **626**, pp551-558 (in Japanese).

Fujita K., Takewaki I., (2009). "Property of critical excitation for moment-resisting frames subjected to horizontal and vertical simultaneous ground motions.", *J. of Zhejiang University-SCIENCE A*, **10**(11), pp1561-1572.

Iyengar R.N., Manohar C.S., (1987). "Nonstationary random critical seismic excitations", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, **113**(4), pp529-541.

Japanese Geotechnical Society, (1996). "Special issue on geotechnical aspects of the January 17 1995 Hyogoken- Nambu Earthquake", *Soils and Foundations*.

Manohar C.S., Sarkar A., (1995). "Critical earthquake input power spectral density function models for engineering structures", *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, **24**, pp1549-1566.

Nigam N.C., (1981). "*Introduction to Random Vibrations"*, MIT Press.

Sarkar A., Manohar, C.S., (1996). "Critical cross power spectral density functions and the highest response of multi-supported structures subjected to multi-component earthquake excitations", *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, **25**, pp303-315.

Smeby W., Der Kiureghian A., (1985) "Modal combination rules for multicomponent earthquake excitation", *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, **13**, pp1-12.

Takewaki I., (2001). "A new method for nonstationary random critical excitation", *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, **30**(4), pp519-535.

Takewaki I., (2002). "Seismic critical excitation method for robust design: A review", *J. Struct. Engrg.*, ASCE, **128**(5),pp 665-672.

Takewaki I., (2004a). "Critical envelope functions for non-stationary random earthquake input", *Computers & Structures*, **82**(20-21), pp1671-1683.

Takewaki I., (2004b). "Bound of earthquake input energy", *J. Struct. Engrg.*, ASCE, **130**(9), pp1289-1297.

Takewaki I., (2006a). "Probabilistic critical excitation method for earthquake energy input rate", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, **132**(9), pp990-1000.

Takewaki I., (2006b). "*Critical Excitation Methods in Earthquake Engineering"*, Elsevier Science, Oxford.

第 4 章　入力地震動の不確定性と支持部材剛性の影響を考慮した粘弾性ダンパーの最適配置法

4.1　極限外乱理論を用いたパッシブダンパーの最適配置法の意義

超高層建築構造物などの大規模建物の構造設計においては，不確定要素を多く含む種々の地震動や風入力に対して構造物の応答を低減することを目的として，多種多様な制振装置を採用することが求められている。制振構造に関する研究の初期の段階では，制振装置の特性や構造システムの開発が主とした目的であり，例えば建物最上部に付加質量を設けることで構造物の応答をコントロールするTuned Mass Damper(=TMD)や，建物基礎部に鉛直剛性が極めて大きくかつ水平剛性が小さな積層ゴムを挿入することにより地盤からの地震入力が建物に入力されるのを回避することができる免振システムなど画期的な制振デバイスが生み出されてきた。また，建物の層間変形(≈せん断変形)を粘性体に寄与させ，粘性体の変形により生じるエネルギー消費を用いて建物の揺れを早期に収束させるようなブレース型の制振装置は広く知られている。このようなダンパーを総じて一般的にパッシブダンパーと呼ばれ，パッシブダンパーの大きな特徴は，建物に設置するのみで応答低減効果を発揮し，チューニングやメンテナンスを要しないため容易に導入が可能であることにある。一方，このような高性能な制振装置の開発・実用化と共に，どの程度のダンパー性能を付加すれば目的とする応答低減効果が得られるかというダンパー配置に関する最適設計問題に対する有効な解法が要請されている。例えば，高層建築構造物では，パッシブダンパーを 1 か所に集中して配置することは一般的ではなく，多層にわたってダンパーを分散して配置することが一般的である。すなわち，ダンパー配置に関する最適設計問題とは，構造物の応答を最も効率よく低減するダンパー配置層を明らかにする問題である。

最適ダンパー配置問題は，制振装置の開発時期と同じくして早期の段階からもいくつかの研究成果が存在する。De Silva(1981)は，勾配型の最適化アルゴリズムを用いて自由振動系の梁要素に対する最適ダンパー量を導いている。Constantino，Tadjbakhsh (1983)は，水平外乱を受けるせん断質点系多層モデルにおいて 1 層への最適な付加ダンパー量を示している。Gurgoze, Muller (1992)は，線形せん断質点系モデルにおいて単一の粘性ダンパーに対する最適設計法を数値的に展開している。また，Hahn，Sathiavageeswaran (1992)は，記録地震波に対して付加剛性を考慮したダンパーの配置の違いが応答に及ぼす影響についてパラメトリックスタディを展開している。辻，中村(1996)は，スペクトル適合波に対して最適な層剛性とダンパー配置を求める問題に対する解法アルゴリズムを示している。

以上のように最適ダンパー配置問題では，特定の入力地震動を対象とすることが一般的であるが，地震動の特性は極めて不確定性が高く予測が困難であるため，現状の設計において最適な応答低減効果をもたらすと考えられているダンパー配置がすべての地震動に対して有効であるとは言い難い。このような問題に対する一つの解法として，竹脇(2000)は，建物にとって最も危険な入力である極限外乱に対して粘性ダンパー付構造物の最適ダンパー配置問題を提示している。第 2 章でも扱ったように極限外乱問題において対象とする構造物に対して最悪なシナリオを生じさせる極限地震動は，建物モデルが有する振動特性に大きく依存する。従って，パッシブダンパーにおいてダンパーの付加に伴って剛性が付加される粘弾性ダンパーを適用する場合は，付加剛性の影響によりダンパーを含めたシステムとしての固有振動数が変化するため，極限外乱(対象とする系の 1 次固有円振動数と共振を起こすような外乱)自身がダンパー配置に依存して変動する。さらに粘弾性ダンパーの多くは，振動数依

存性などの複雑な力学特性を有しており，粘性ダンパーのような単純なモデル化は困難である。そこで，ここでは，多要素モデルなどを用いた定式化が必要である。詳細については後述する。このようなモデルを対象とした最適ダンパー配置問題はこれまでに扱われたことがない。

また，パッシブダンパーによる応答低減効果は，ダンパーを支持する取り付け部材や機構（以下支持部材）の性能（＝剛性）により大きく異なることが知られている。すなわち，ダンパーの容量が増大すると, 支持部材に作用する軸力も増大するため支持部材に十分な性能が確保されていない場合には支持部材が降伏することも考えられ, このような現象が生じるとダンパーの性能を十分に発揮することができないと考えられる。従って，最適ダンパー配置問題を考える上で，支持部材の設計には十分に留意する必要がある。本論文では，各層の粘弾性ダンパー面積ならびに支持部材剛性および強度を設計変数とし, 粘弾性ダンパーの付加による構造物特性の変動を考慮した変動極限外乱に対して評価関数を最小化する最適ダンパー配置問題を扱い，その解法を示す。

4.2　入力地震動の不確定性と支持部材剛性の影響を考慮した粘弾性ダンパーの最適配置問題

本節では，本章で扱う粘弾性ダンパーのモデル化を示した上で，ダンパー取り付け部の支持部材剛性を考慮したうえで，最適ダンパー配置問題の定式化を展開する。

4.2.1　振動数依存性を有する粘弾性ダンパーのモデル化

本章で展開する最適ダンパー配置問題において対象とする建物モデルは, 粘弾性ダンパーを有する N 層せん断質点系として扱う(図 4-1)。粘弾性ダンパー(=VED: Visocoelastic Damper)は，一般に，ひずみ依存性, 温度依存性および振動数依存性を有しており, VED を用いた制振装置を導入する場合は，適切にダンパーの力学性状を再現したモデル化を行う必要がある。ここでは，振動数依存性のみを考慮した VED モデルを扱うものとし，応答レベルに応じた特性変動(ひずみ依存性)ならびに温度依存性については扱わない。粘弾性ダンパーのモデル化に関しては種々の方法が既往の研究により報告されているが，ここでは竹脇ら(2001)が報告したアクリル系粘弾性ダンパーを扱うものとし，VED モデルは，4 要素モデルで表わされるものとする。支持部材を考慮したアクリル系粘弾性ダンパーは，図 4-1 に示すように 4 要素モデルに剛性 k_{b} を有する支持部材を表す接続要素が直列に接続されたモデルとして扱う。ここでは，N 層せん断系モデルに組み込まれる支持部材を含めた VED モデルとして以下の 2 つのモデルを考える。

1)　N 自由度モデル(N モデル)

支持部材付 VED を振動数依存型となる等価 Kelvin-Voigt モデルに置換したモデル

2)　3N 自由度モデル(3N モデル)

4 要素モデルにおける Maxwell 要素間ならびに 4 要素モデルと支持部材の間に微小質点を設け，各要素間の相対変位を評価することができる（各要素は振動数非依存)

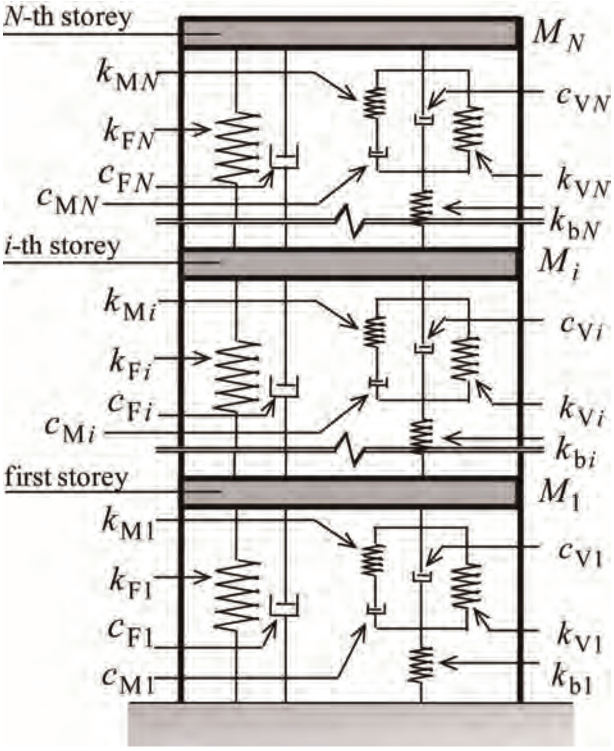


図 4-1 支持部材付粘弾性ダンパーを有するせん断建物モデル

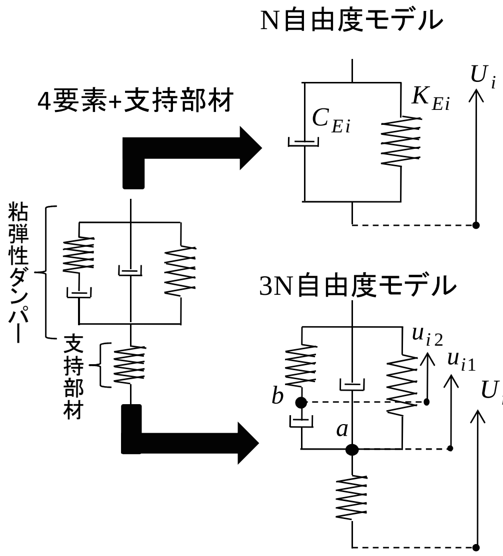


図 4-2 支持部材を考慮した粘弾性ダンパーのモデル化

図 4-2 に示す 3N 自由度モデルにおいて，U_i は第 i 層における床変位を表し，u_{i1} および u_{i2} は，当該層における仮想質点 a ならびに b の地動に対する相対変位をそれぞれ表す。また，図 4-2 に示す N 自由度モデルでは，1 層あたりの自由度は 1 つのみであり，U_i は 3N モデルのものと同義である。N モデルでは，自由度が少ないので演算時間の上で有利であるが，等価剛性 $K_{Ei}(\omega)$ ならびに等価減衰係数 $C_{Ei}(\omega)$ は，共に振動数の関数となる点に留意する必要がある。一方，3N モデルでは，自由度が多く多層建物モデルでは大規模なマトリクスを処理する必要があり不利であるが, 変位自由度間が単一のバネまたはダッシュポットで表現されているために感度表現を容易に行うことが可能である。以降では，両者のダンパーのモデルを詳細に定式化し，モデル化の有用性，妥当性については数値シミュレーションの節において詳細に比較検証する。

4.2.1.1　等価 Kelvin-Voigt モデルへの置換(N モデル)

図 4-2 に示す N モデルにおける支持部材付 VED を等価 Kelvin-Voigt モデルに置換した時の $K_{Ei}(\omega)$ および $C_{Ei}(\omega)$ は次式で与えられる(李(2002))。

$$K_{Ei}(\omega, S_d, k_b) = \left\{(A - B\omega^2)(C - D\omega^2) + EF\omega^2\right\} / \left\{(C - D\omega^2)^2 + F^2\omega^2\right\} \tag{4-1}$$

$$C_{Ei}(\omega, S_d, k_b) = \left\{(BF - DE)\omega^2 + CE - AF\right\} / \left\{(C - D\omega^2)^2 + F^2\omega^2\right\} \tag{4-2}$$

ここに $A \sim F$ は，各層のダンパー諸元 k_{Mi}, k_{Vi}, c_{Mi} および c_{Vi} (＝各層ダンパー面積 S_{di} に図 2 に示す 4 要素モデルの各構成要素の単位面積当たりの剛性係数 k_{dM}, k_{dV} ならびに減衰係数 c_{dM}, c_{dV} をそれぞれ乗じたもの)を用いて次のように定義される。

$$A = k_{\mathrm{b}i} k_{\mathrm{M}i} k_{\mathrm{V}i}\,,\quad B = k_{\mathrm{b}i} c_{\mathrm{M}i} c_{\mathrm{V}i}\,,\quad C = k_{\mathrm{b}i} k_{\mathrm{M}i} + k_{\mathrm{M}i} k_{\mathrm{V}i}\,,\quad D = c_{\mathrm{M}i} c_{\mathrm{V}i}$$
$$E = k_{\mathrm{b}i}\left(k_{\mathrm{V}i} c_{\mathrm{M}i} + k_{\mathrm{M}i} c_{\mathrm{M}i} + k_{\mathrm{M}i} c_{\mathrm{V}i}\right),\quad F = c_{\mathrm{M}i}\left(k_{\mathrm{b}i} + k_{\mathrm{V}i}\right) + k_{\mathrm{M}i}\left(c_{\mathrm{M}i} + c_{\mathrm{V}i}\right)$$

(4-3 a,b,c,d,e,f)

4.2.1.2 微小質点を仮定した詳細モデルへの置換（3N モデル）

3N モデルでは，各要素間の釣合式を求めることで 3N モデルにおける運動方程式を構成する建物全体系の質量マトリクス $\mathbf{M}_{\mathrm{Full}}$，剛性マトリクス $\mathbf{K}_{\mathrm{Full}}$ および減衰マトリクス $\mathbf{C}_{\mathrm{Full}}$ が得られる。ここではこれらのマトリクスの導出については省略するが，これらを構成する各成分は，図 4-1 に示す各要素パラメター，すなわち剛性 $k_f, k_{\mathrm{dM}}, k_{\mathrm{dV}}$ あるいは減衰係数 $c_f, c_{\mathrm{dM}}, c_{\mathrm{dV}}$ の線形和の形式で求められ，振動数に依存しない関数である。例えば 4 要素モデルにおける微小質点 a および b における質量を m_1，m_2 と記すとすれば，2 層モデルにおける $\mathbf{M}_{\mathrm{Full}}$，　$\mathbf{K}_{\mathrm{Full}}$ および $\mathbf{C}_{\mathrm{Full}}$ は次式で表わされる。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & m_1 & & & & \vdots \\ \vdots & & m_2 & & & \vdots \\ \vdots & & & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & & & m_1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{f1} + c_{f2} + c_{\mathrm{dV1}} & -c_{\mathrm{dV1}} & 0 & -c_{f2} & 0 & 0 \\ -c_{\mathrm{dV1}} & c_{\mathrm{dV1}} + c_{\mathrm{dM1}} & -c_{\mathrm{dM_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{\mathrm{dM1}} & c_{\mathrm{dM1}} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{f2} & 0 & 0 & c_{f2} + c_{\mathrm{dV2}} & -c_{\mathrm{dV2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{\mathrm{dV2}} & c_{\mathrm{dV2}} + c_{\mathrm{dM2}} & -c_{\mathrm{dM2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{\mathrm{dM2}} & c_{\mathrm{dM2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \begin{array}{l} k_{f1} + k_{f2} \\ + k_{\mathrm{dV1}} + k_{\mathrm{dM1}} + k_{\mathrm{b2}} \end{array} & -k_{\mathrm{dV1}} & -k_{\mathrm{dM1}} & -k_{f2} & -k_{\mathrm{b2}} & 0 \\ -k_{\mathrm{dV1}} & k_{\mathrm{b1}} + k_{\mathrm{dV1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{\mathrm{dM1}} & 0 & k_{\mathrm{dM1}} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{f2} & 0 & 0 & k_{f2} + k_{\mathrm{dV2}} + k_{\mathrm{dM2}} & -k_{\mathrm{dV2}} & -k_{\mathrm{dM2}} \\ -k_{\mathrm{b2}} & 0 & 0 & -k_{\mathrm{dV2}} & k_{\mathrm{b2}} + k_{\mathrm{dV2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{\mathrm{dM2}} & 0 & k_{\mathrm{dM2}} \end{bmatrix}$$

(4-4 a,b,c)

4.2.2　変動極限外乱の定義

対象とする構造物に制振デバイスを導入することによる応答低減効果を検証する際には種々の記録地震波や詳細なサイト波を設計用地震動として入力し，時刻歴応答解析を実施することが多い。しかしながら，入力外乱の特性に依存して異なる応答性状に対して応答低減効果を検証するために複数の波を用いた時刻歴応答解析を繰り返し実施する必要がある。従って，ダンパーの適切な配置を考慮する最適設計問題を考える上では，上述のような時刻歴応答解析に基づく設計手法は煩雑であると言

わざるを得ない。また，振動数依存性を有する減衰機構を扱う場合は，構造物特性が応答の振動モードに応じて異なる特性を有するため時間領域での時刻歴解析には特に配慮が必要である。

一方,時間領域の運動方程式を周波数領域に変換することにより構造物の周波数応答を扱うことが可能である。振動数領域での応答評価法では，入力外乱のパワースペクトル密度関数 $S_g(\omega)$ (以下 Auto PSD 関数) ならびに対象とする応答の伝達関数を用いることにより応答の標準偏差を評価することが可能である。前者は入力特性を，後者は構造物特性をそれぞれ表し，例えば層間変位の標準偏差 $\boldsymbol{\sigma}_\delta$ は，層間変位に関する伝達関数マトリクス $\mathbf{H}_\delta(\omega)$ を用いて次式で表わされる。

$$\boldsymbol{\sigma}_\delta = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathbf{H}_\delta(\omega)\right|^2 S_g(\omega)\, d\omega} \tag{4-5}$$

振動数領域での応答評価の方法は次節で詳しく展開するが，振動数領域での応答評価法は，伝達関数を用いることにより入力特性と構造物特性を明確に分離することが可能であるため,周波数領域での入力特性ならびに構造物特性の相互関係が応答に及ぼす影響について簡便に考察が可能であるという利点を有する。また，標準偏差と最大応答値には一定の関係があることが知られており，応答の標準偏差にピークファクター(定数)を乗じることで最大応答値を推定することが可能である。本論文では,入力外乱として定常ランダム入力を対象とする。入力外乱の特性は,入力外乱の PSD 関数 $S_g(\omega)$ を与えることにより定義することとする。

応答低減効果の高い最適なダンパー配置を考慮する上で,入力外乱の選定は設計者に委ねられることが多い。しかしながら，地震動は極めて不確定性が高く特定の外乱に対して設計された最適ダンパー配置が異なる特性を有する外乱に対しても十分な応答低減効果を発揮するとは限らない。そこで対象とする建物に対して極限的な応答となる特性を有する(=極限外乱)Auto PSD 関数 $S_g(\omega)$ を与えることを考える。すなわち，本章で展開する最適ダンパー配置問題は，特定の入力特性に対して対象とする応答量を最小化するダンパー付加量を見出すのではなく,対象とする建物にとって最も危険な応答となる入力外乱特性に対して最適なダンパー配置方法を見出すことが,将来起こりうる不確定な地震動に対して最もロバスト性を有するダンパー配置であるという考えに基づく。図 4-3 では，本章で展開する最適ダンパー配置問題の概念図を示す。

1 次モードが卓越する建物では，一般的には 1 次固有円振動数と共振域を有する入力が極限外乱となる。従って，ここでは入力外乱の Auto PSD 関数 $S_g(\omega)$ を図 4-4 に示すように有帯域ホワイトノイズで与える。図 4-4 において，帯域中心 ω_c は建物モデルの 1 次固有円振動数 ω_0 とし，ω_L および ω_U は PSD 関数の振動数の上下限値である。また，$\overline{S}$ は PSD 関数のパワー，$\bar{s}$ は PSD 関数の振幅を表す。$\overline{S}$ および $\bar{s}$ の上限値は，種々の記録地震波の分析結果と比較することにより適切に設定を行う。

制振ダンパーとして VED を用いる場合では，材料特性として剛性を有するために，VED の付加に応じて系の剛性が増大し，VED を含めた建物全体系の 1 次固有周期は短くなる。従って，ω_0 は VED 面積 $\mathbf{S_d}$ の関数であり，極限外乱における PSD 関数 $S_g(\omega)_{crit}$ は，最適化プロセスにおいてダンパー量に追随してその特性が変動する。ここでは，このような外乱を変動極限外乱と称する。

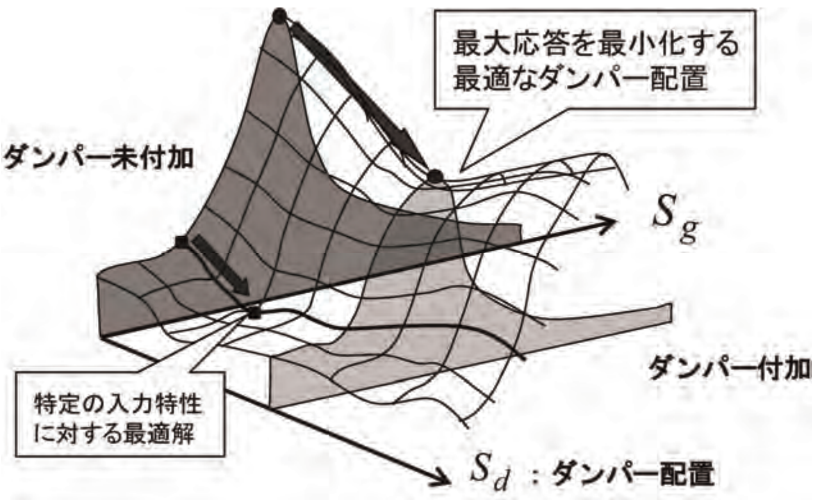


図 4-3 入力特性の変動に対する最適ダンパー配置問題

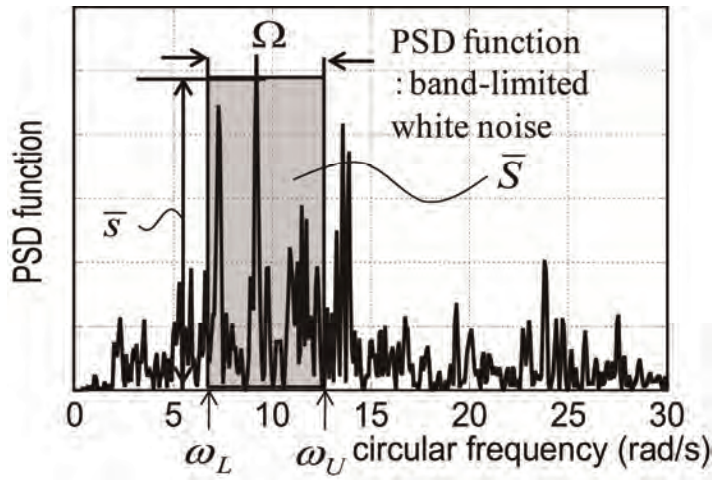


図 4-4 記録地震波に対する PSD 関数と有帯域ホワイトノイズとなる矩形 PSD 関数

4.2.3　振動数領域における応答評価の定式化

4.2.3.1　3N 自由度モデル

図 4-1 に示す N 層建物モデルにおいて，地動加速度入力 $\ddot{u}_g(t)$ を受ける 3N 自由度モデルによる運動方程式は，次式で表わされる。

$$\mathbf{M}_{\mathrm{Full}}\ddot{\mathbf{u}}_{\mathrm{Full}}(t)+\mathbf{C}_{\mathrm{Full}}\dot{\mathbf{u}}_{\mathrm{Full}}(t)+\mathbf{K}_{\mathrm{Full}}\mathbf{u}_{\mathrm{Full}}(t)=-\mathbf{M}_{\mathrm{Full}}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) \tag{4-6}$$

ここに， $\mathbf{u}_{\mathrm{Full}}(t)=\{U_1,u_{11},u_{12},U_2,u_{21},,\cdots,U_N,u_{N1},u_{N2},\}^T$ ， $\mathbf{r}=\{1,\cdots,1\}^T$ であり，$(\dot{\ })$ および$(\ddot{\ })$ は，それぞれ時間 t に関する 1 階微分ならびに 2 階微分を表す。また，$\mathbf{M}_{\mathrm{Full}}$，$\mathbf{C}_{\mathrm{Full}}$ および $\mathbf{K}_{\mathrm{Full}}$ は，(4-4)式において建物層数を N とした際に得られる粘弾性ダンパーを有する建物モデル全体系の質量，減衰および剛性マトリクスであり， それぞれのマトリクスは 3N×3N マトリクスとなる。 (4-6)式を振動数領域で表わせば次式となる。

$$\mathbf{A}_{\mathrm{Full}}\mathbf{U}_{\mathrm{Full}}(\omega)=\mathbf{B}_{\mathrm{Full}}\ddot{U}_g(\omega) \tag{4-7}$$

ここに$\mathbf{U}_{\mathrm{Full}}(\omega)$および$\ddot{U}_g(\omega)$は，$\mathbf{u}_{\mathrm{Full}}(t)$ならびに$\ddot{u}_g(t)$のフーリエ変換である。また，$\mathbf{A}_{\mathrm{Full}}$および$\mathbf{B}_{\mathrm{Full}}$をそれぞれ次式で定義する。i は，虚数単位である。

$$\mathbf{A}_{\mathrm{Full}} = -\omega^2 \mathbf{M}_{\mathrm{Full}} + \mathrm{i}\omega \mathbf{C}_{\mathrm{Full}} + \mathbf{K}_{\mathrm{Full}} \tag{4-8a}$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{Full}} = -\mathbf{M}_{\mathrm{Full}}\mathbf{r} \tag{4-8b}$$

(4-7)式より$\mathbf{U}_{\mathrm{Full}}(\omega)$は，次式で表わされる。

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{\mathrm{Full}}(\omega) &= \mathbf{A}_{\mathrm{Full}}{}^{-1}\mathbf{B}_{\mathrm{Full}}\ddot{U}_g(\omega) \\ &= \mathbf{H}_{\mathrm{Full}}\ddot{U}_g(\omega)\end{aligned} \tag{4-9}$$

(4-9)式において，$\mathbf{H}_{\mathrm{Full}}$を 3N モデルにおける相対変位$\mathbf{U}(\omega)$の地動加速度$\ddot{U}_g(\omega)$に対する伝達関数と定義する。$\mathbf{H}_{\mathrm{Full}}$に対して，1,0 で構成される変換マトリクス$\mathbf{T}$を乗じることにより，層間変位に関する伝達関数$\mathbf{H}_{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{Full}}(\omega)$が得られる。

本章で展開する最適ダンパー問題における評価関数fは，層間変位の二乗平均値の和とする。設計変数は，各層の VED 面積$\mathbf{S_d} = \{S_{\mathrm{d}i}\}$　$(i = 1, \cdots, N)$ならびに支持部材剛性$\mathbf{k_b} = \{k_{\mathrm{b}i}\}$　$(i = 1, \cdots, N)$である。層間変位の二乗平均値$E[\delta_i(t)^2]$を$\sigma_{\delta i}^2$とすれば，層間変位に関する伝達関数$\mathbf{H}_{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{Full}}(\omega)$の第 1+3(i-1)行成分$H_{\delta\{1+3(i-1)\}}^{\mathrm{Full}}(\omega;\mathbf{S_d},\mathbf{k_b})$を用いて，3N モデルにおける評価関数$f_{3N}$は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}f_{3N} &= \sum_{i=1}^{N}\sigma_{\delta i}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H_{\delta\{1+3(i-1)\}}^{\mathrm{Full}}(\omega;\mathbf{S_d},\mathbf{k_b})\right|^2 S_g(\omega)d\omega\end{aligned} \tag{4-10}$$

なお(4-10)式における層間変位に関する伝達関数$\mathbf{H}_{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{Full}}(\omega)$は，設計変数$\mathbf{S_d},\mathbf{k_b}$の関数であるが，以後の表現では，$\mathbf{S_d},\mathbf{k_b}$が変数であるという記述を省略することとする。

最適設計のプロセスにおいて支持部材剛性の設計変更を考えるには, 支持部材に関する制約条件を設ける必要がある。ここでは，支持部材に作用する軸力が強度を超過すべきではないという観点に基づき, 各層のダンパーの支持部材に作用する軸力$N_{\mathrm{b}i}$を評価する。3N 自由度モデルにおける$N_{\mathrm{b}i}$は, 各節点の伝達関数$\mathbf{H}_{full}$を用いて支持部材の両端の相対変位の最大値を評価し, 当該層の剛性$k_{\mathrm{b}i}$を乗じることで得られ，次式で表わされる。

$$N_{\mathrm{b}i} = \rho k_{\mathrm{b}i}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathbf{T_b}\left[\mathbf{H}_{\mathrm{Full}}(\omega)\right]_{2+3(i-1)}\right|^2 S_g(\omega)d\omega\right)^{1/2} \tag{4-11}$$

ここに$\mathbf{T_b}$は, 各節点の相対変位を支持部材両端の相対変位に変換するための係数マトリクスである。ただし，ここでは支持部材両端の相対変位の二乗平均応答の標準偏差にピークファクターρを乗じたものを最大変位応答とみなす。

4.2.3.2　N 自由度モデル

次に N モデルを用いた定式化を行う。形式的には 3N モデルとほぼ同様であるが，N モデルでは剛性マトリクスおよび減衰マトリクスが振動数の関数であるため, 時間領域による運動方程式を記述することは困難である。(4-7)式に対応する N モデルの振動数領域における運動方程式は次式となる。

$$\mathbf{AU}(\omega)=\mathbf{B}\ddot{U}_g(\omega) \tag{4-12}$$

ここに $\mathbf{A}$ および $\mathbf{B}$ は，(4-8a,b)式における $\mathbf{M}_{\mathrm{Full}}$，$\mathbf{C}_{\mathrm{Full}}$ および $\mathbf{K}_{\mathrm{Full}}$ を N モデルに対応した $\mathbf{M}$，$\mathbf{C}$ および $\mathbf{K}$ に置き換えたものである。$\mathbf{C}$ および $\mathbf{K}$ は，一般的なせん断質点系の N×N の減衰，剛性マトリクスであり，その各成分は，ダンパーを有しない構造躯体のみによる構造減衰 c_{fi} ならびに剛性 k_{fi} に(4-1)式および(4-2)式で表わされる等価 Kelvin-Voigt モデルの付加減衰 $K_{\mathrm{E}i}$ ならびに付加剛性 $C_{\mathrm{E}i}$ をそれぞれ加えたものである。(4-10)式に対応する N 自由度モデルにおける評価関数 f_{N} も同様に次式で表わされる。

$$f_{\mathrm{N}}=\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H_{\delta i}(\omega)\right|^2 S_g(\omega)d\omega \tag{4-13}$$

ここに $H_{\delta i}(\omega)$ は, N モデルにおける層間変位に関する伝達関数 $\mathbf{H_\delta}(\omega)=\mathbf{TA}^{-1}\mathbf{B}$ の第 i 成分である。

N 自由度モデルでは，図 4-2 に示したようにダンパーユニットを表す 4 要素モデルと支持部材が直列に接続されているので，各層の支持部材に作用する軸力 $N_{\mathrm{b}i}$ は，等価 Kelvin-Voigt モデルに作用する内力と等価であるとする。すなわち，(4-11)式に対応する支持部材に作用する軸力は，当該層の層間変位の伝達関数 $H_{\delta i}(\omega)$ に等価 Kelvin-Voigt モデルの複素剛性 $K_{\mathrm{E}i}(\omega)+\mathrm{i}\,\omega \mathrm{C}_{\mathrm{E}i}(\omega)$ を乗じて支持部材に作用する軸力の伝達関数 $H_{\mathrm{Nb}i}(\omega)$ を新たに定義することにより次式で表わされる。

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{b}i} &= \rho\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left\{K_{\mathrm{E}i}(\omega)+\mathrm{i}\,\omega C_{\mathrm{E}i}(\omega)\right\}H_{\delta i}(\omega)\right|^2 S_g(\omega)d\omega\right)^{1/2} \\ &= \rho\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|H_{\mathrm{Nb}i}(\omega)\right|^2 S_g(\omega)d\omega\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{4-14}$$

以上のような(4-10)式，(4-11)式，(4-13)式および(4-14)式で示す振動数領域による伝達関数を用いた応答評価手法は，外乱の入力特性を表す $S_g(\omega)$ および構造物の特性を表す伝達関数 $\mathbf{H_{Nb}}$ ならびに $\mathbf{H_\delta}$ を分離した形で陽に表わすことが可能である。しかしながら，いずれの応答量も二乗平均値であり，(4-11)式や(4-14)式にみられるように支持部材に作用する軸力の最大値を評価する際には，ピークファクター ρ を乗じる必要がある。ピークファクターを設定する上で，一般的に 2.5～3.0 が妥当であると知られている。しかしながら，これらは風外乱等定常的な入力に対する応答を対象としているものがほとんどであり, 時間に関して非定常性を有する 4 地震動に対する応答を評価する際には留意するべきである。そこで，後述する 4.5.3 節では地震動に対する応答量の二乗平均値と最大応答値を分析して適切なピークファクターの設定に関する検証を実施する。

4.2.4　ダンパー配置と支持部材剛性の同時最適設計問題

建物にダンパーを配置する上で，最適なダンパー配置を見出す問題は，粘性や粘弾性ダンパー等の種々のダンパーを対象としたものとしてこれまでにも数多くの成果が挙げられるが, ダンパーの設置

による応答低減効果を十分に発揮するためには支持部材の機構に注意を払う必要がある。本節では，支持部材の取り扱いを考慮した最適設計問題を提示する。

【最適設計問題】**支持部材剛性の設計変更を考慮する設計問題**

まず設計変数を VED 面積$\mathbf{S_d}$ならびに支持部材剛性$\mathbf{k_b}$とした上で，VED による構造物特性の変動を考慮した変動極限外乱に対して(4-13)式で表わされる評価関数を最小化する最適化問題(PODP-VCE:　The Problem of Optimal Damper Placement for Variable Critical Excitation)を考える。なおここでは，N 自由度モデルのみについて記すが，後述するように 3N 自由度モデルに対応する感度表現を導出することによりいずれのモデルについても同様に扱うことが可能である。以降では，(4-13)式で表わされる N 自由度モデルにおける評価関数f_{N}をfと表記することにする。本論文で扱う最適化問題では，地動外乱に対して対象とする応答量を最小化する層を感度解析により見出し，当該層に最適な VED を配置すると伴に，各層支持部材に作用する軸力$\mathbf{N_b} = \{N_{\mathrm{b}i}\}$を(4-14)式により評価し，軸力制約がアクティブになると当該層における$N_{\mathrm{b}i}$が支持部材の強度による制約条件を満足するように支持部材剛性の設計変更を行う。本最適設計問題は，次のように記述できる。

$$
\begin{aligned}
&\textit{Find} && \mathbf{S}_{\mathrm{d}} = \{S_{\mathrm{d}1},\cdots,S_{\mathrm{d}N}\},\ \mathbf{k}_{\mathrm{b}} = \{k_{\mathrm{b}1},\cdots,k_{\mathrm{b}N}\} \\
&\textit{To}\quad \textit{minimize} && f(\mathbf{S}_{\mathrm{d}},\mathbf{k}_{\mathrm{b}}) = \sum_{i=1}^{N}\sigma_{\delta i}^{2} \\
&\textit{Subject}\quad \textit{to} && \sum_{i=1}^{N} S_{\mathrm{d}i} = \bar{W} \\
& && 0 \le S_{\mathrm{d}i} \le \bar{S}_{\mathrm{d}i} : i = 1,\ldots.,N \\
& && N_{\mathrm{b}i}(\mathbf{S}_{\mathrm{d}},\mathbf{k}_{\mathrm{b}}) \le \bar{P}_{yi}(k_{\mathrm{b}i}) \quad (i = 1,2,\ldots.,N)
\end{aligned}
\tag{4-15}
$$

$\bar{W}$　：VED 総面積の上限値

$\bar{S}_{\mathrm{d}i}$　：各層に設置可能なダンパー面積の上限値

$\bar{P}_{yi}$　：各層の支持部材の降伏軸力

ここで，$N_{\mathrm{b}i}$は各層の VED 面積$\mathbf{S_d}$および支持部材剛性$\mathbf{k_b}$の関数であり，VED の付加により増大する。また，$\bar{P}_{yi}$は，当該層の剛性$k_{\mathrm{b}i}$のみの関数であると仮定する。

粘弾性ダンパーおよびダンパー取り付け部の支持部材剛性に関する最適設計問題では, 建物躯体の諸元(各層の質量, 剛性, 構造減衰)およびダンパー支持部材の初期剛性$\mathbf{k_{b0}} = \{k_{\mathrm{b}i0}\}$が与えられており，初期状態では全層にわたって VED は存在しないものとする。設計変数は，各層 VED 面積の分布を表す層方向のベクトル$\mathbf{S_d}$ならび各層の VED に接続される支持部材の剛性$\mathbf{k_b}$である。一般的に支持部材剛性$\mathbf{k_b}$は剛であればある程，構造物の減衰性能が向上するので，$\mathbf{k_b}$の上下限値を制約条件として課しても$\mathbf{k_b}$の最適設計解は常に上限値に定まると思われ不適切である。そこで$\mathbf{S_d}$および$\mathbf{k_b}$に関する制約条件として以下の３点について考える。(1) ダンパー総量に関するもの，(2) 各層に設置可能なダンパー量の上下限，(3)支持部材に作用する軸力の上限値，すなわち支持部材強度とする。$\mathbf{k_b}$に関する制約条件は(3)のみであるが, 支持部材に作用する軸力が強度に達する以前 (制約条件が非アクティブな状態)の時は，$\mathbf{k_b}$は初期の設計値を維持し，制約条件がアクティブになると制約条件が等

号で満足され続けるように，支持部材剛性の設計変更を行うものとする。

ここで，制約条件において，ダンパー総量$\bar{W}$は設計者が任意に設定することが可能であるが，ここでは最適化プロセスにおいて最大層間変形角を逐次算定し,規定された性能を満足するまで最適設計を継続することとする。従って，最大層間変形角が指定した値を下回った時点で最適設計のプロセスが終了するため，建物モデルに応じて必要なダンパー総量は異なると考えられる。

また，VED の代わりに粘性ダンパーを用いる場合では，(4-15)式において VED 面積$\mathbf{S_d}$を粘性ダンパーの減衰係数の層方向ベクトル$\mathbf{c}_v$に置換することにより，同様な問題として展開することが可能である。さらに粘性ダンパーを用いる場合は,感度表現が極めて容易に導出することが可能であり(1，0のみで構成されるマトリクスで記述可能)，4.4.2 節で後述する VED を対象とした感度表現を粘性ダンパーのものへと置き換えればよい。以降では主として VED を対象として議論を展開する。

4.3　ダンパー配置と支持部材剛性に対する最適性条件

4.2.4 節で記述した最適化問題をラグランジュ乗数法により記述すればラグランジアンは次式となる。

$$
\begin{aligned}
&L(\mathbf{S_d},\mathbf{k_b},\lambda,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\kappa}) \\
&= f+\lambda\left(\sum_{i=1}^{N}S_{\mathrm{d}i}-\bar{W}\right)+\sum_{i=1}^{N}\mu_i\left(0-S_{\mathrm{d}i}\right)+\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\left(S_{\mathrm{d}i}-\bar{S}_{\mathrm{d}i}\right)+\sum_{i=1}^{N}\kappa_i\left(N_{\mathrm{b}i}-\bar{P}_{\mathrm{y}i}\right)
\end{aligned}
\tag{4-16}
$$

ここにλ，$\boldsymbol{\mu}=\{\mu_i\}$，$\boldsymbol{\gamma}=\{\gamma_i\}$，$\boldsymbol{\kappa}=\{\kappa_i\}$は非負のラグランジュ乗数である。本節では，(4-16)式における各設計変数$\mathbf{S}_\mathrm{d}$および$\mathbf{k_b}$に対する最適性条件を導く。

ダンパー面積$\mathbf{S}_\mathrm{d}$並びに支持部材に作用する軸力$\mathbf{N_b}$が上下限制約条件を共に不等号で満足している場合は,設計変数$\mathbf{S}_\mathrm{d}$および$\mathbf{k_b}$に関するラグランジアン$L(\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\kappa}=0)$の停留条件により次式が導かれる。

$$
f_{,j}+\lambda=0 \quad \text{for} \quad 0<S_{\mathrm{d}j}<\bar{S}_{\mathrm{d}j}\,,\,N_{\mathrm{b}j}<\bar{P}_{yj} \quad (j=1,\cdots,N) \tag{4-17}
$$

$$
f^{,j}=0 \qquad \text{for} \quad N_{\mathrm{b}j}<\bar{P}_{yj} \quad (j=1,\cdots,N) \tag{4-18}
$$

ここで，$(\ )_{,i}$および$(\ )^{,i}$は，ダンパー面積$S_{\mathrm{d}i}$および支持部材剛性$k_{\mathrm{b}i}$に対する 1 次感度をそれぞれ表す。

ダンパー付加に伴う軸力$N_{\mathrm{b}i}$の増加により，$N_{\mathrm{b}i}$が上限値$\bar{P}_{\mathrm{y}i}$に達する場合が考えられる。このとき$\mathbf{N_b}=\{N_{\mathrm{b}i}\}$のうち$N_{\mathrm{b}i}=\bar{P}_{\mathrm{y}i}$に達する層の数を$n$とし，当該層を$q_x\ (x=1,2,\ldots,n)$とすれば，ラグランジアン$L(\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\gamma}=0)$の停留条件より次式が導かれる。

$$
f_{,j}+\lambda+\sum_{i=1}^{q_n}\kappa_i N_{\mathrm{b}i,j}=0 \qquad \text{for} \quad \begin{array}{l} 0<S_{\mathrm{d}j}<\bar{S}_{\mathrm{d}j}\ (j=1,\cdots,N) \\ N_{\mathrm{b}i}=\bar{P}_{\mathrm{y}i} \quad (i=q_1,\cdots,q_n) \end{array} \tag{4-19}
$$

$$
\begin{aligned}
&f^{,j}+\sum_{i=1}^{q_n}\kappa_i\left(N_{\mathrm{b}i}{}^{,j}-\bar{P}_{yi}{}^{,j}\right)=0 \qquad \text{for} \quad N_{\mathrm{b}j}=\bar{P}_{yj} \quad (j=q_1,\cdots,q_n) \\
&\approx f^{,j}+\kappa_j\left(N_{\mathrm{b}j}{}^{,j}-\bar{P}_{yj}{}^{,j}\right)=0
\end{aligned}
\tag{4-20}
$$

(4-19)式および(4-20)式において，支持部材に作用する軸力 N_{bi} が初期の制約条件 $N_{bi} \le \bar{P}_{yi}$ を等号で満足する場合は， $\kappa_j \ge 0\,(j = q_1, \cdots, q_n)$ となることに留意する必要がある。ここでは，異なる層の支持部材剛性の変化が当該層の軸力に及ぼす影響は無視できるという物理的知見に基づき，(4-20)式における $N_{\mathrm{b}i}$ は i 層の支持部材剛性 $k_{\mathrm{b}i}$ のみの関数であると仮定する。すなわち， $i \ne j$ のとき $N_{\mathrm{b}i,j} = 0$ とする。このような仮定を設けた理由は， κ_j を陽に表わすことで，後述する感度表現の展開を可能にするためである。

また, ダンパー面積 $\mathbf{S}_{\mathrm{d}}$ の上下限制約のいずれかを等号で満足する場合の最適性条件は次式となる。

$$f_{,j} + \lambda \ge 0 \qquad \text{for} \quad S_{\mathrm{d}i} = 0 \tag{4-21}$$

$$f_{,j} + \lambda + \sum_{i=1}^{q_n} \kappa_i N_{\mathrm{b}i,j} \le 0 \qquad \text{for} \quad \begin{array}{l} S_{\mathrm{d}j} = \bar{S}_{\mathrm{d}j} \\ N_{\mathrm{b}i} = \bar{P}_{\mathrm{y}i} \quad (i = q_1, \cdots, q_n) \end{array} \tag{4-22}$$

(4-22)式で $N_{\mathrm{b}i} < \bar{P}_{yi}$ の場合は， $f_{,j} + \lambda \le 0$ となる。

最適化問題の解法として汎用的に用いられる逐次二次計画法(=SQP 法)などでは，1 次感度および 2 次感度，言いかえれば勾配ベクトルならびに Hessian マトリックスを数値微分により評価することが一般的であるが，本最適化問題における評価関数 f は陽に表現されているため，これらの感度情報をあらかじめ求めることが可能である。感度表現の定式化については，4.2.7 節に示す。

4.4　最適設計問題に対する解法

4.4.1　　最適設計問題に対する勾配型最適化アルゴリズム

本節では，VED および支持部材剛性を設計変数とした最適設計問題 I に対する解法のアルゴリズムを示す。図 4-5 では，以下に記す各 Step における操作のフローチャートを図示する。また，図 4-6 では，最適化プロセスにおける設計変数の変化の模式図を図示し，最適性条件の取り扱いが異なる領域 A,B,C および D を定義する。

Start　ダンパーのない建物モデルの躯体の設計を行う。

Step 1　非減衰 1 次固有円振動数 ω_0 を複素固有値解析により導出する。

Step 2　PSD 関数 $S_g(\omega)$ を振動中心が ω_0 と一致する共振型の有帯域ホワイトノイズとして与える。

Step 3　各層の支持部材に作用する軸力を評価し，強度による制約条件を等号で満足する層の数(= n)をカウントする。

Step 4　評価関数 f のダンパー面積 S_{d} に対する 1 次感度の絶対値が最大となる層 p を見出す。ただし，Step.3 において， $N_{\mathrm{b}i} = \bar{P}_{\mathrm{y}i}$ となる層が存在する場合は，ラグランジュ乗数 κ_i を考慮した感度表現を用いる必要がある。

Step 5　評価関数の 1 次感度の絶対値が最大となる層の数(= m)をカウントする。

本最適化プロセスは，Step.5 および Step.3 で見出される m ならびに n の組み合わせにより，図 4-7 に示す各領域へと分類される。各領域では，最適性条件を満足し続けるように，(4-17)式から(4-22)式を適宜用いて当該層に配置する適切なダンパー量および支持部材剛性の変更値が算出される。表 4-1 では，各領域において用いる最適性条件の式をまとめている。

Step 6A $m=1, n=0$ の場合は，図 4-7 において領域 A に該当する。この時，$\max_j |f_{,j}|$ となる特定の層にダンパーを付加する。

Step 6B $m \geq 2, n=0$ の場合は, 図 4-7 において領域 B に該当する。この時, 複数の層において $\max_j |f_{,j}|$ が重複するため，最適性条件に基づいて 1 次感度の変化率が等しくなるように複数の層にダンパーを分配する。

Step 6C $m=1, n=1$ の場合は，図 4-7 において領域 C に該当する。この時，支持部材に作用する軸力 $N_{\mathrm{b}q_1}$ が降伏軸力 $\bar{P}_{yq_1}$ に達するため，支持部材剛性の設計変更を行う[*1]。

Step 6D $m \geq 2, n \geq 1$ の場合は，図 4-7 において領域 D に該当する。この時，最適性条件を満足し続けるためには，評価関数 1 次感度の変化率および支持部材に作用する軸力と強度の変化率が等しくなる条件下で当該層の VED 面積の変動量 $\Delta S_{\mathrm{d}i}\ (i=p_1,\cdots,p_m)$ ならびに $N_{\mathrm{b}i}=\bar{P}_{yi}$ となる当該層の支持部材剛性の変動量 $\Delta k_{\mathrm{b}i}\ (i=q_1,\cdots,q_n)$ を決定する[*2]。

Step 7 Step.6A，B，C または D で得られた設計変数の変動分を用いて現在の設計変数 $\mathbf{S}_\mathrm{d}$ および $\mathbf{k}_\mathbf{b}$ を更新する。

設計変更後のシステムが性能クライテリアを満足するまで Step.1~Step.7 を繰り返す。すなわち，ダンパー付加後の最大層間変形角が所定の規定値を満たすまで，ダンパー総量を漸増させながら，最適な層位置に VED を付加し続ける。性能クライテリアを満足した時点で最適設計プロセスを終了する。また，総ダンパー面積が $\bar{W}$ に達しても性能クライテリアを満足できなかった場合も，最適設計プロセスは終了するが，ダンパー総量を増加させる，骨組剛性分布を変更するなどの処理が必要になる。

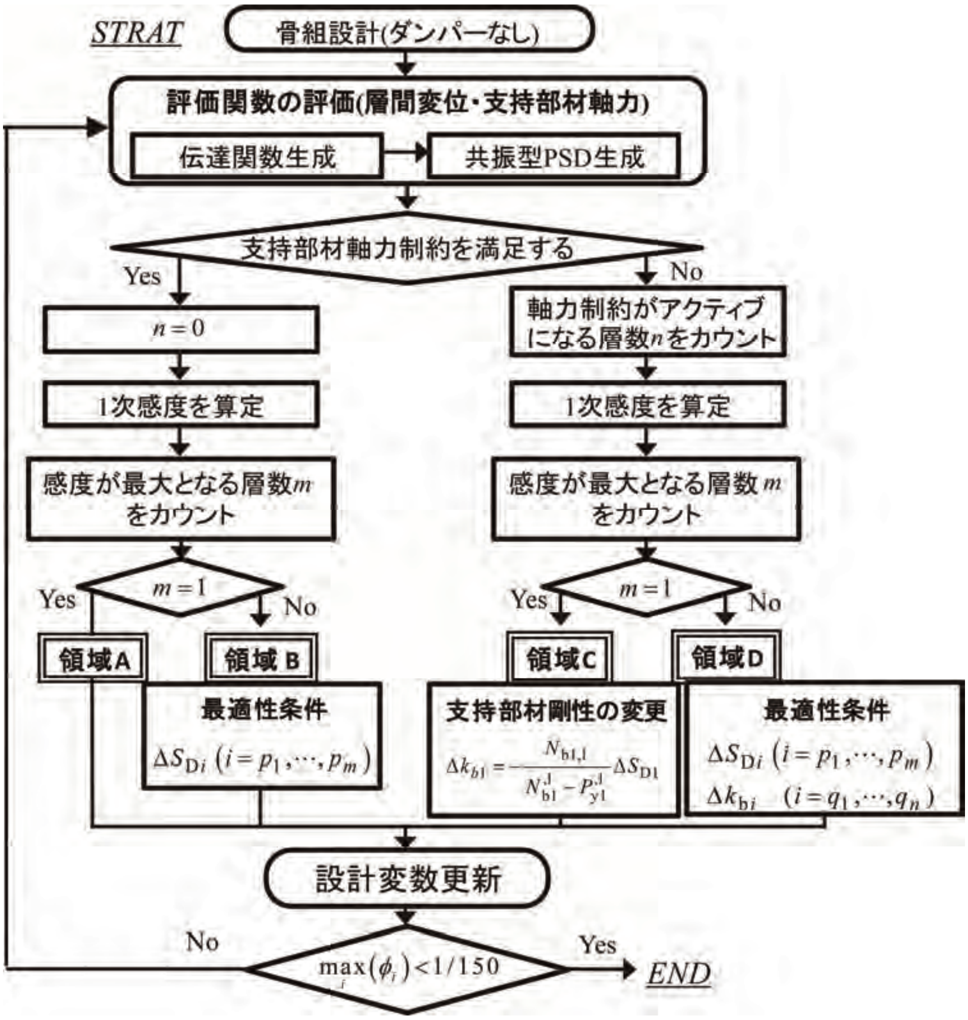


図 4-5 最適設計問題 I に対する解法アルゴリズム

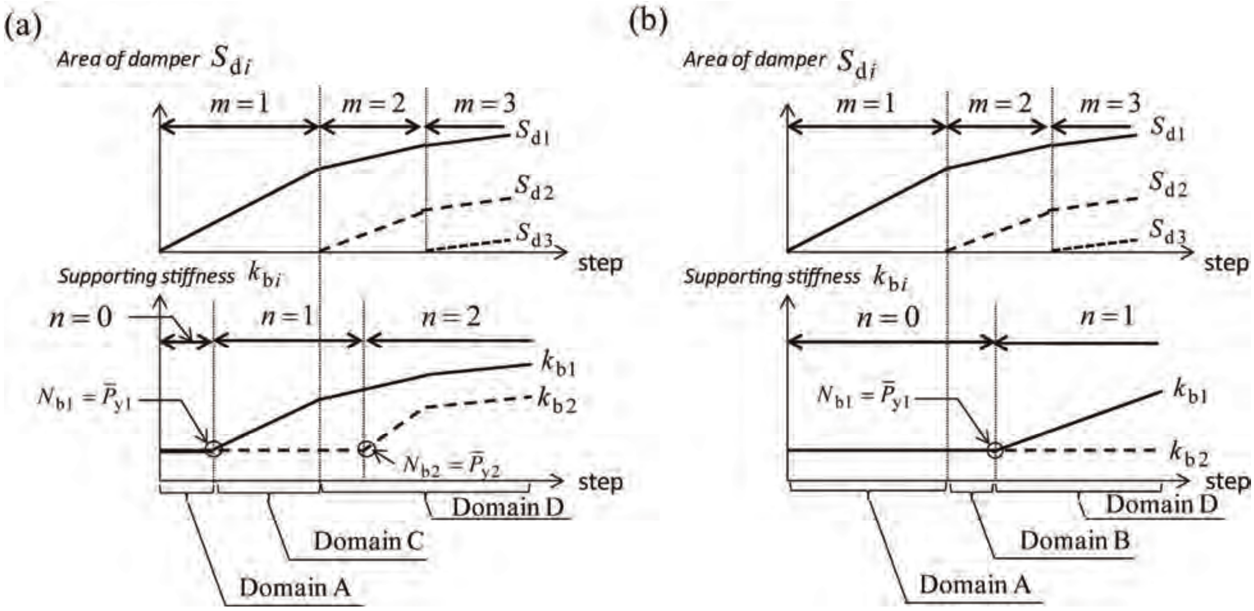


図 4-6 最適化プロセスにおける設計変数更新の模式図

表 4-1 各領域において適用する最適性条件

<table>
<tr><td rowspan="2">領域 A
($m=1, n=0$)</td><td>p_1 層</td><td colspan="2">それ以外の層</td></tr>
<tr><td>(4-17)式, (4-18)式</td><td colspan="2">(4-21)式</td></tr>
<tr><td rowspan="2">領域 B
($m\geq 2, n=0$)</td><td>$p_1 \sim p_m$ 層</td><td colspan="2">それ以外の層</td></tr>
<tr><td>(4-17)式，(4-18)式</td><td colspan="2">(4-21)式</td></tr>
<tr><td rowspan="2">領域 C
($m=1, n=1$)</td><td>$p_1\,(=q_1)$ 層</td><td colspan="2">それ以外の層</td></tr>
<tr><td>(4-19)式, (4-20)式</td><td colspan="2">(4-21)式</td></tr>
<tr><td rowspan="2">領域 D
($m\geq 2, n\geq 1$)</td><td>q_1〜q_n 層</td><td>p_{n+1}〜p_m 層</td><td>それ以外の層</td></tr>
<tr><td>(4-19)式, (4-20)式</td><td>(4-17)式，(4-18)式</td><td>(4-21)式</td></tr>
</table>

ここで，前述したプロセス内において，*1 および*2 での具体的操作を以下に記す。

*1: Step.6C において，$m=1, n=1$ の時，VED の付加により評価関数を最も低減する層位置は 1 つであり，dS_{d} を当該の層に付加していく。また，$n=1$ では当該層の支持部材に作用する軸力は，降伏軸力に達している。従って，最適性条件を満足し続けるためには，当該層における $N_{\mathrm{b}q_x}$ の増分 $\Delta N_{\mathrm{b}q_x}$ と強度の増分 ΔP_{q_x} が等しくなるように，すなわち次ステップにおける支持部材に作用する軸力 $N'_{\mathrm{b}i}$ が強度 $\bar{P}'_{yi}$ と一致するように支持部材剛性の設計変更を行うものとすれば，次の関係式が得られる。

$$
\begin{aligned}
& dN_{\mathrm{b}j} = d\bar{P}_{\mathrm{y}j} \\
& \Rightarrow \sum_{i=q_1}^{q_n} \left(N_{\mathrm{b}j,i} \Delta S_{\mathrm{d}i} \right) + N_{\mathrm{b}j}{}^{,j} \Delta k_{\mathrm{b}j} = \bar{P}_{\mathrm{y}j}{}^{,j} \Delta k_{\mathrm{b}j} \quad (\, j = q_1, \ldots, q_n \,)
\end{aligned}
\tag{4-23}
$$

ここで $n=1$ より，$\Delta k_{\mathrm{b}q_1}$ は，次式で求められる。

$$
\Delta k_{\mathrm{b}q_1} = \frac{-N_{\mathrm{b}q_1, q_1}}{N_{\mathrm{b}q_1}{}^{,q_1} - \bar{P}_{\mathrm{y}q_1}{}^{,q_1}} \Delta S_{\mathrm{d}p_1} \tag{4-24}
$$

*2: Step.6D において，$\left\{ \left| f_{,j} \right| \right\}$ の最大値が複数層で一致する場合は，最適性条件を考慮した上で該当する複数層に適切なダンパー面積を分配する必要がある。f および $f_{,j}$ はそれぞれ次のように更新される。

$$
f \rightarrow f + \sum_{i=p_1}^{p_m} f_{,i} \Delta S_{\mathrm{d}i} + \sum_{i=q_1}^{q_n} \kappa_i N_{\mathrm{b}i,i} \Delta S_{\mathrm{d}i} \tag{4-25}
$$

$$f_{,j} \to f_{,j} + \sum_{i=p_1}^{p_m} \left(f_{,ji} \Delta S_{\mathrm{d}i} + f_{,j}^{,i} \Delta k_{\mathrm{b}i} \right) + \sum_{j=q_1}^{q_n} \left((\kappa_j N_{\mathrm{b}j,j})_{,i} \Delta S_{\mathrm{d}i} + (\kappa_j N_{\mathrm{b}j,j})^{,i} \Delta k_{\mathrm{b}i} \right) \tag{4-26}$$

(4-25)式および(4-26)式におけるラグランジュ乗数κ_jは，(4-20)式で導入した近似により次式のように導かれる。また，Appendix 1 では，κ_jを厳密に求める方法を示したうえで，数値例を用いた両者の比較を行い，(4-20)式で導入した近似の妥当性について検証を行った。

$$\kappa_j = \frac{-f^{,j}}{N_{\mathrm{b}j}{}^{,j} - \bar{P}_{\mathrm{y}j}{}^{,j}} \quad (j = q_1, \cdots, q_n) \tag{4-27}$$

(4-27)式を(4-24)式に代入し，更新後の$\left\{ \left| f_{,P_x} \right| \right\}$はそれぞれ等しいことを考慮すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} &\sum_{i=p_1}^{p_m} (f_{,ji} \Delta S_{\mathrm{d}i} + f_{,j}^{,i} \Delta k_{\mathrm{b}i}) \\ &- \sum_{i=q_1}^{q_n} \frac{d(f^{,i} N_{\mathrm{b}i,j}) \left(N_{\mathrm{b}i}{}^{,i} - \bar{P}_{\mathrm{y}i}{}^{,i} \right) - f^{,i} N_{\mathrm{b}i,j} d\left(N_{\mathrm{b}i}{}^{,i} - \bar{P}_{\mathrm{y}i}{}^{,i} \right)}{\left(N_{\mathrm{b}i}{}^{,i} - \bar{P}_{\mathrm{y}i}{}^{,i} \right)^2} = const. \ (j = q_1, \ldots, q_n) \\ &\sum_{i=p_1}^{p_m} (f_{,ji} \Delta S_{\mathrm{d}i} + f_{,j}^{,i} \Delta k_{\mathrm{b}i}) = const. \qquad (j = p_{n+1}, \ldots, p_m) \end{aligned} \tag{4-28a,b}$$

(4-28a)式および(4-28b)式をそれぞれ全微分することにより，未知数である設計変数$\{S_{\mathrm{d}i}\}$ および$\{k_{\mathrm{b}i}\}$ に関する$m-1$個の方程式が得られる。

また，m層に分配するダンパー面積$\mathbf{S}_\mathrm{d}$の和は，ダンパー増分量dS_dに等しいので次式を得る。

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_{\mathrm{d}q_i} = dS_\mathrm{d} \tag{4-29}$$

従って$m+n$個の未知数である設計変数$\mathbf{S}_\mathrm{d} = \{S_{\mathrm{d}i}\} \ (i = p_1, \cdots, p_m)$ ならびに$\mathbf{k_b} = \{k_{\mathrm{b}i}\} \ (i = q_1, \cdots, q_n)$は，(4-23)式,(4-28a,b)式および(4-29)式より次の線形連立方程式を解くことにより得られる。

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m-1,1} & \cdots & \alpha_{m-1,m} & \beta_{m-1,1} & \cdots & \beta_{m-1,n} \\ N_{\mathrm{b}q_1,q_1} & \cdots & N_{\mathrm{b}q_1,p_m} & N_{\mathrm{b}q_1}{}^{,q_1} - \bar{P}_{\mathrm{y}q_1}{}^{,q_1} & \cdots & N_{\mathrm{b}q_1}{}^{,q_n} - \bar{P}_{\mathrm{y}q_1}{}^{,q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{\mathrm{b}q_n,1} & \cdots & N_{\mathrm{b}q_n,p_m} & N_{\mathrm{b}q_n}{}^{,q_1} - \bar{P}_{\mathrm{y}q_n}{}^{,q_1} & \cdots & N_{\mathrm{b}q_n}{}^{,q_n} - \bar{P}_{q_n}{}^{,q_n} \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta S_{\mathrm{d}p_1} \\ \vdots \\ \Delta S_{\mathrm{d}p_m} \\ \Delta k_{\mathrm{b}q_1} \\ \vdots \\ \Delta k_{\mathrm{b}q_n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ dS_\mathrm{d} \end{Bmatrix} \tag{4-30}$$

ここでα_{ij}およびβ_{ij}は，それぞれ次式で表わされる。

$$\alpha_{ij} = f_{,1p_j} - f_{,p_{i+1}p_j} + \sum_{\alpha=q_1}^{q_n} \frac{1}{N_{\mathrm{b}\alpha}{}^{,\alpha} - \bar{P}_{\mathrm{y}\alpha}{}^{,\alpha}} \left\{ \begin{aligned} &-\left\{ N_{\mathrm{b}\alpha,1} f_{,p_j}^{,\alpha} + f^{,\alpha} \bar{P}_{\mathrm{b}\alpha,1p_j} - N_{\mathrm{b}\alpha,p_{i+1}} f_{,p_j}^{,\alpha} + f^{,\alpha} \bar{P}_{\mathrm{b}\alpha,p_{i+1}p_j} \right\} \\ &+ \frac{1}{N_{\mathrm{b}\alpha}{}^{,\alpha} - \bar{P}_{\mathrm{y}\alpha}{}^{,\alpha}} \left\{ f^{,\alpha} N_{\mathrm{b}\alpha,1} N_{\mathrm{b}\alpha,P_j}^{,\alpha} - f^{,\alpha} N_{\mathrm{b}\alpha,p_{i+1}} N_{\mathrm{b}\alpha,p_j}^{,\alpha} \right\} \end{aligned} \right\}$$

(4-31)

$$\beta_{ij} = f_{,1}^{,q_j} - f_{,p_{i+1}}^{,q_j} + \sum_{\alpha=q_1}^{q_n} \frac{1}{N_{\mathrm{b}\alpha}{}^{,\alpha} - \bar{P}_{\mathrm{y}\alpha}{}^{,\alpha}} \left\{ \begin{array}{l} -\left\{ N_{\mathrm{b}\alpha,1} f^{,\alpha q_j} + f^{,\alpha} N_{\mathrm{b}\alpha,1}{}^{,q_j} + N_{\mathrm{b}\alpha,p_{i+1}} f^{,\alpha q_j} + f^{,\alpha} N_{\mathrm{b}\alpha,p_{i+1}}{}^{,q_j} \right\} \\ + \dfrac{1}{N_{\mathrm{b}\alpha}{}^{,\alpha} - \bar{P}_{\mathrm{y}\alpha}{}^{,\alpha}} \left\{ f^{,\alpha} N_{\mathrm{b}\alpha,1} N_{\mathrm{b}\alpha}{}^{,\alpha q_j} - f^{,\alpha} N_{\mathrm{b}\alpha,p_{i+1}} N_{\mathrm{b}\alpha}{}^{,\alpha q_j} \right\} \end{array} \right\}$$

(4-32)

4.4.2　評価関数の設計変数に対する感度表現

ここでは, 前節で展開した最適設計問題に対する勾配型解法アルゴリズムにおいて必要となる種々の感度表現，すなわち評価関数 f および支持部材に作用する軸力 $\mathbf{N}_{\mathrm{b}}$ の設計変数に対する勾配ベクトルと Hessian マトリックスの定式化について記す。

(4-13)式で定義した本論文で扱う設計問題における評価関数 f は，伝達関数を用いた応答の二乗平均値で表わされるため, ダンパー面積 $S_{\mathrm{d}i}$ に対する 1 次感度 $f_{,i}$ および 2 次感度 $f_{,ij}$ を陽に導くことが可能である。(4-13)式において, 4.2.2 節でモデル化した外乱の Auto PSD 関数 $S_g(\omega)$ は $\omega_L \le \omega \le \omega_U$ の区間のみ非零の有限値 $\bar{s}$ を有し， $S_g(\omega)$ のパワーレベルは $\bar{S}$ である。従って，(4-13)式は次のように表わすことができる。

$$f(\mathbf{S}_{\mathrm{d}}, \mathbf{k_b}) = \bar{S} \sum_{i=1}^{N} \left\{ \Psi_{\delta i}(\omega_U; \mathbf{S}_{\mathrm{d}}, \mathbf{k_b}) - \Psi_{\delta i}(\omega_L; \mathbf{S}_{\mathrm{d}}, \mathbf{k_b}) \right\} \tag{4-33}$$

ここに $\Psi_{\delta i}$ を，次式で定義する。なお $(\ )^*$ は，複素共役を表す。

$$\Psi_{\delta i}(\hat{\omega}; \mathbf{S}_{\mathrm{d}}, \mathbf{k_b}) = \int_0^{\hat{\omega}} H_{\delta i}(\omega) H_{\delta i}{}^*(\omega) d\omega \tag{4-34}$$

(4-33)式において ω_L および ω_U は, 非減衰 1 次固有円振動数 $\omega_0(\mathbf{S}_{\mathrm{d}})$ の関数であるので, 評価関数 f は $\omega_0(\mathbf{S}_{\mathrm{d}})$ の陰関数であるといえる。従って，評価関数 f のダンパー面積 $\mathbf{S}_{\mathrm{d}}$ に対する感度 $f_{,j}$ および $f_{,jk}$ は次のように表わされる。

$$f_{,j} = 2\bar{S} \sum_{i=1}^{N} \left[\begin{array}{l} (\omega_0)_{,j} \left\{ H_{\delta i}(\omega_U) - H_{\delta i}(\omega_L) \right\} \\ + \int_{\omega_L}^{\omega_U} \left\{ H_{\delta_i}(\omega) \right\}_{,j} H_{\delta_i}^*(\omega) + H_{\delta_i}(\omega) \left\{ H_{\delta_i}^*(\omega) \right\}_{,j} d\omega \end{array} \right] \tag{4-35}$$

$$f_{,jk} = 2\bar{S} \sum_{i=1}^{N} \left[\begin{array}{l} (\omega_0)_{,jk} \left\{ H_{\delta i}(\omega_U) - H_{\delta i}(\omega_L) \right\} \\ + (\omega_0)_{,j} \left\{ \begin{array}{l} (\omega_0)_{,k} \left(\partial H_{\delta i}(\omega_U)/\partial\omega_0 - \partial H_{\delta i}(\omega_L)/\partial\omega_0 \right) \\ + H_{\delta i}(\omega_U)_{,k} - H_{\delta i}(\omega_L)_{,k} \end{array} \right\} \\ + (\omega_0)_{,k} \left\{ H_{\delta i}(\omega_U)_{,j} - H_{\delta i}(\omega_L)_{,j} \right\} \\ + \int_{\omega_L}^{\omega_U} \left[\begin{array}{l} \left\{ H_{\delta_i}(\omega) \right\}_{,jk} H_{\delta_i}^*(\omega) + \left\{ H_{\delta_i}(\omega) \right\}_{,j} \left\{ H_{\delta_i}^*(\omega) \right\}_{,k} \\ \left\{ H_{\delta_i}(\omega) \right\}_{,k} \left\{ H_{\delta_i}^*(\omega) \right\}_{,j} + H_{\delta_i}(\omega) \left\{ H_{\delta_i}^*(\omega) \right\}_{,jk} \end{array} \right] \end{array} \right] \tag{4-36}$$

ここで, $\left\{ H_{\delta_i}(\omega) \right\}_{,j}$ および $\left\{ H_{\delta_i}(\omega) \right\}_{,jk}$ は, 層間変位に関する伝達関数の定義より次式で表わされる。

$$\left\{H_{\delta_i}(\omega)\right\}_{,j} = \mathbf{T}_i\left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{,j}\mathbf{B} \tag{4-37a}$$

$$\left\{H_{\delta_i}(\omega)\right\}_{,jk} = \mathbf{T}_i\left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{,jk}\mathbf{B} \tag{4-37b}$$

(4-37a)式において，$\mathbf{A}_{,j}^{-1}$ は $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ より次のように求められる。

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{,j}^{-1} &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,j}\mathbf{A}^{-1} \\ &= -\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{K}_{,j} + \mathrm{i}\,\omega\mathbf{C}_{,j}\right)\mathbf{A}^{-1}\end{aligned} \tag{4-38}$$

ここで $\mathbf{K}_{,j}$ および $\mathbf{C}_{,j}$ の各成分は，それぞれ(4-1)，(4-2)式の $K_{\mathrm{E}i}$ および $C_{\mathrm{E}i}$ の設計変数 $S_{\mathrm{d}j}$ に関する感度 $K_{\mathrm{E}i,j}$，$C_{\mathrm{E}i,j}$ を用いて表わすことができる。$K_{\mathrm{E}i,j}$ および $C_{\mathrm{E}i,j}$ は，次式となる。

$$K_{\mathrm{E}i}(\omega, S_{\mathrm{d}i}, k_{\mathrm{b}i})_{,j} = k_{\mathrm{b}i}^2 \frac{S_{\mathrm{d}i}^2 c_1 c_2 + 2c_1 c_3 k_{\mathrm{b}i} S_{\mathrm{d}i} + c_2 c_3 k_{\mathrm{b}i}^2}{(c_1 S_{\mathrm{d}i}^2 + 2c_2 k_{\mathrm{b}i} S_{\mathrm{d}i} + c_3 k_{\mathrm{b}i}^2)^2} \tag{4-39}$$

$$C_{\mathrm{E}i}(\omega, S_{\mathrm{d}i}, k_{\mathrm{b}i})_{,j} = k_{\mathrm{b}i}^2 \frac{c_4(c_1 S_{\mathrm{d}i}^2 + c_3 k_{\mathrm{b}i}^2)}{(c_1 S_{\mathrm{d}i}^2 + 2c_2 k_{\mathrm{b}i} S_{\mathrm{d}i} + c_3 k_{\mathrm{b}i}^2)^2} \tag{4-40}$$

ここに係数 $c_1 \sim c_4$ は，それぞれ次のように表わされる。

$$\varepsilon_1 = k_{\mathrm{dM}} k_{\mathrm{dV}} - c_{\mathrm{dM}} c_{\mathrm{dV}} \omega^2$$

$$\varepsilon_2 = k_{\mathrm{dM}} c_{\mathrm{dM}} + k_{\mathrm{dV}} c_{\mathrm{dM}} + k_{\mathrm{dM}} c_{\mathrm{dV}}$$

$$c_1 = {\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2 \omega^2$$

$$c_2 = k_{\mathrm{dM}} \varepsilon_1 + c_{\mathrm{dM}} \varepsilon_2 \omega^2$$

$$c_3 = k_{\mathrm{dM}}^2 + c_{\mathrm{dM}}^2 \omega^2$$

$$c_4 = -c_{\mathrm{dM}} \varepsilon_1 + k_{\mathrm{dM}} \varepsilon_2 \tag{4-41a,b,c,d,e,f}$$

また，(4-37b)式において，$(\mathbf{A}^{-1})_{,jk}$ は(4-38)式をさらに設計変数 S_{dk} に関して 1 階微分することにより次式が導かれる。

$$\mathbf{A}_{,jk}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{A}_{,j}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,k} + \mathbf{A}_{,k}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,j}\right)\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,jk}\mathbf{A}^{-1} \tag{4-42}$$

ここで，粘性ダンパーや 3N 自由度モデルでは，マトリクスを構成する各要素がダンパー要素における剛性や減衰係数の線形和で構成される。従って，(4-42)式において $\mathbf{A}$ の S_{d} に関する 2 階微分の項である $\mathbf{A}_{,jk}$ は常に零行列となるため存在しない。一方，N 自由度モデルの場合は，(4-40)式および(4-41)式より $K_{\mathrm{E}i}(\omega)_{,j}$ および $C_{\mathrm{E}i}(\omega)_{,j}$ が設計変数 $S_{\mathrm{d}j}$ の関数となっており，$K_{\mathrm{E}i}(\omega, S_{\mathrm{d}i}, k_{\mathrm{b}i})_{,jk}$ およ

び$C_{\mathrm{E}i}(\omega,S_{\mathrm{d}i},k_{\mathrm{b}i})_{,jk}$は$j=k$の時に非零の成分を有しているために，$j=k$において$\mathbf{A}$の$\mathbf{S}_{\mathrm{d}}$に関する2階微分の項を考慮する必要がある。N自由度モデルのVEDにおける$\mathbf{A}^{-1}_{,jk}$ は，Appendix 2で示す。

次に，評価関数fの支持部材剛性$k_{\mathrm{b}i}$に対する1次感度$f^{,j}$および2次感度$f^{,jk}$を導出する。$f^{,j}$および$f^{,jk}$は，(4-35)式ならびに(4-36)式に対応する形式で得られ，次式で表わされる。

$$f^{,j}=2\bar{S}\sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\omega_L}^{\omega_U}\left\{H_{\delta_i}(\omega)\right\}^{,j}H^{*}_{\delta_i}(\omega)d\omega+\int_{\omega_L}^{\omega_U}H_{\delta_i}(\omega)\left\{H^{*}_{\delta_i}(\omega)\right\}^{,j}d\omega\right] \tag{4-43}$$

$$f^{,jk}=2\bar{S}\sum_{i=1}^{N}\left[\begin{array}{l}\int_{\omega_L}^{\omega_U}\left\{H_{\delta_i}(\omega)\right\}^{,jk}H^{*}_{\delta_i}(\omega)d\omega+\int_{\omega_L}^{\omega_U}\left\{H_{\delta_i}(\omega)\right\}^{,j}\left\{H^{*}_{\delta_i}(\omega)\right\}^{,k}d\omega\\+\int_{\omega_L}^{\omega_U}\left\{H_{\delta_i}(\omega)\right\}^{,k}\left\{H^{*}_{\delta_i}(\omega)\right\}^{,j}d\omega+\int_{\omega_L}^{\omega_U}H_{\delta_i}(\omega)\left\{H^{*}_{\delta_i}(\omega)\right\}^{,jk}d\omega\end{array}\right] \tag{4-44}$$

ここに$\left\{H_{\delta_i}(\omega)\right\}^{,j}=\mathbf{T}_i\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{,j}\mathbf{B}$，$\left\{H_{\delta_i}(\omega)\right\}^{,jk}=\mathbf{T}_i\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{,jk}\mathbf{B}$

$(\mathbf{A}^{-1})^{,j}$は，$K_{\mathrm{E}i}$および$C_{\mathrm{E}i}$の設計変数$k_{\mathrm{b}i}$に関する感度$K_{\mathrm{E}i}{}^{,j}$，$C_{\mathrm{E}i}{}^{,j}$の関数であり，$K_{\mathrm{E}i}{}^{,j}$および$C_{\mathrm{E}i}{}^{,j}$は，次式となる。

$$K_{\mathrm{E}i}(\omega,S_{\mathrm{d}i},k_{\mathrm{b}i})^{,j}=S_{\mathrm{d}i}{}^{2}\frac{S_{\mathrm{d}i}^{2}c_1^2+2c_1c_2k_{\mathrm{b}i}S_{\mathrm{d}i}+(2c_2^2-c_1c_3)k_{\mathrm{b}i}^{2}}{(c_1S_{\mathrm{d}i}^{2}+2c_2k_{\mathrm{b}i}S_{\mathrm{d}i}+c_3k_{\mathrm{b}i}^{2})^2} \tag{4-45}$$

$$C_{\mathrm{E}i}(\omega,S_{\mathrm{d}i},k_{\mathrm{b}i})^{,j}=\frac{2S_{\mathrm{d}i}^{2}k_{\mathrm{b}i}c_4(k_{\mathrm{b}i}c_2+c_1S_{\mathrm{d}i})}{(c_1S_{\mathrm{d}i}^{2}+2c_2k_{\mathrm{b}i}S_{\mathrm{d}i}+c_3k_{\mathrm{b}i}^{2})^2} \tag{4-46}$$

また，$(\mathbf{A}^{-1})^{,jk}$は，(4-42)式において，$\mathbf{A}_{,j}$，$\mathbf{A}_{,k}$および$\mathbf{A}_{,jk}$をそれぞれ$\mathbf{A}^{,j}$，$\mathbf{A}^{,k}$および$\mathbf{A}^{,jk}$に置き換えたもので表わされる。

次に支持部材に作用する軸力$N_{\mathrm{b}i}$のVED面積$S_{\mathrm{d}i}$に対する1次感度$N_{\mathrm{b}i,j}$は，(4-11)式より次式で表わされる。

$$N_{\mathrm{b}i,j}=\rho(2\bar{S}/\int_{\omega_L}^{\omega_U}\left|H_{\mathrm{N}_{bi}}(\omega)\right|^2d\omega)^{1/2}\int_{\omega_L}^{\omega_U}\mathrm{Re}\left[(H_{\mathrm{N}_{bi}}(\omega))_{,j}H^{*}_{\mathrm{N}_{bi}}(\omega)\right]d\omega \tag{4-47}$$

ここで$H_{\mathrm{N}_{bi}}(\omega)$は，(4-11)式より層間変位に対する伝達関数$H_{\delta i}(\omega)$に対してさらに複素剛性の項$\hat{K}_{\mathrm{E}i}\equiv K_{\mathrm{E}i}(\omega)+\mathrm{i}\omega C_{\mathrm{E}i}(\omega)$を乗じている点に留意すれば，支持部材の軸力に関する伝達関数$(H_{\mathrm{N}_{bi}}(\omega))_{,j}$は次式で表わされる。

$$\left(H_{\mathrm{N}_{bi}}(\omega)\right)_{,j}=\begin{cases}\hat{K}_{\mathrm{E}i}H_{\delta i}(\omega)_{,j}+\hat{K}_{\mathrm{E}i,j}H_{\delta i}(\omega)_{,j} & (i=j)\\ \hat{K}_{\mathrm{E}i}H_{\delta i}(\omega)_{,j} & (i\neq j)\end{cases} \tag{4-48}$$

また，支持部材に作用する軸力$N_{\mathrm{b}i}$の支持部材剛性$k_{\mathrm{b}i}$に対する1次感度$N_{\mathrm{b}i}{}^{,i}$は，(4-48)式の$(H_{\mathrm{N}_{bi}}(\omega))_{,j}$を$(H_{\mathrm{N}_{bi}}(\omega))^{,i}$に置換することにより同様に得られる。ここで，$(H_{\mathrm{N}_{bi}}(\omega))^{,i}$は，(4-49)式における$\hat{K}_{\mathrm{Ei},j}$並びに$H_{\delta i}(\omega)_{,j}$を(4-47)式で表わされる$\hat{K}_{\mathrm{Ei}}{}^{,j}$，$H_{\delta i}(\omega)^{,j}$にそれぞれ置換することに

より得られる。

一方，粘性ダンパーを扱う場合は，付加ダンパーによる変化は減衰マトリクスのみに表れるためより容易な定式化が可能である。例えば，(4-41)式における $\mathbf{A}_{,j}$ は減衰マトリクスのみを扱えばよく次式に示すように表わされる。

$$\mathbf{A}_{,j} = \mathbf{C}_{,j} \tag{4-49}$$

(4-51)式において，$\mathbf{C}_{,j}$ は粘性ダンパーによる減衰マトリクスにおいて第 j 層の減衰係数に対する感度であり，次のように表わされる。

$$\mathbf{C}_{,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \\ & 1 & -1 & \\ & -1 & 1 & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4-50}$$

4.5　5 層および 10 層せん断型建物モデルに対する最適設計例

支持部材剛性の設計変更を考慮した最適ダンパー配置法により得られる最適なダンパー配置解の妥当性や本理論の有用性を示すために，以降では本提案手法を用いた数値シミュレーションを行い，変動極限外乱に対する VED および支持部材剛性を設計変数とする最適設計問題について検証する。

4.5.1 構造物と粘弾性ダンパーのモデルパラメターの設定

本節では，5 層および 10 層の建物モデルを対象とし，各層を 1 質点に集約したせん断質点系モデルとして扱う。表 4-2 に建物モデルの諸元を示す。ここでは, 各層の質量および骨組剛性は均一とし，構造減衰は 2%とする。

本論文で扱う VED の最適設計問題では，最適化プロセスにおいて建物モデルの振動モードと共振を起こす極限外乱特性を与えるために，構造物特性の変動に追随して逐次複素固有値解析を行い，固有円振動数を算定する必要がある。しかしながら，N 自由度モデルでは支持部材と 4 要素モデルで表わされる粘弾性ダンパーの等価剛性 K_{E} ならびに等価減衰係数 C_{E} は，(4-1)式ならびに(4-2)式に見られるように振動数 ω の関数となっており，固有値の導出には K_{E} ならびに C_{E} の振動数 ω に適当な値を代入したときのシステム特性から固有値を演算し，収束計算を必要とするため計算負荷が大きい。従って，ここでは複素固有値解析を行う上では, 3N 自由度モデルを用いる。 3N 自由度モデルでは, 微小なダミー質点を考慮する必要があるが, 両者の伝達関数を比較し適切なダミー質点の質量を明らかにする必要がある。図 4-7 は，N 自由度モデルおよび 3N 自由度モデルの評価関数 f の伝達関数 $|H_{\delta i}(\omega)|$ を対数軸上で比較したものである(ただし，N=10；10 層モデル)。図 4-8 において， ε は，4 要素モデル内の微小質点と 1 層分建物質量の比であり，ε が十分に小さい場合，すなわち微小質点が建物質量に対して十分に小さい場合は, 両モデルの伝達関数は, よい対応を示すことが分かる。一方，3N 自由度モデルにおける微小質点を過大に設定（ε=0.1)すると，伝達関数に差が生じる点に留意する必要がある。また，図 4-7 より本モデルでは，1 次固有円振動数付近の伝達関数が特に卓越しており，2 次以上の高次モードの影響は少ないと考えられる。

次に，4.2.1 節で展開した 4 要素粘弾性ダンパーの特性について言及する。本数値例で扱う粘弾性ダンパーは，実験結果よりアクリル系粘弾性ダンパー(10mm 厚)とし，4 要素モデルにおける単位面

積(1cm^2)当たりの係数は，表 4-3 のように与えられる。また，図 4-8 では，表 4-3 で示すパラメターに対して VED を N 自由度モデルとしてモデル化した際に得られる振動数変化に対するダンパー特性の変動を図示した。振動数の増加により等価剛性 K_E は増加，等価減衰係数 C_E は減少することがわかる。

表 4-2 構造物モデルの諸元

	5 層モデル	10 層モデル
質量[t]	512	1024
剛性(全層均等) [N/m]	1.51×10^9	1.20×10^9
1 次固有円振動数 [rad/s]	15.59	5.116
1 次固有周期 [s]	0.406	1.228
構造減衰	2%	2%

表 4-3 アクリル系粘弾性ダンパー諸元

K_{dV}	2756.3[N/m^3]	K_{dM}	5120.5[N/m^3]
C_{dV}	221.7[Ns/m^3]	C_{dM}	254.8[Ns/m^3]

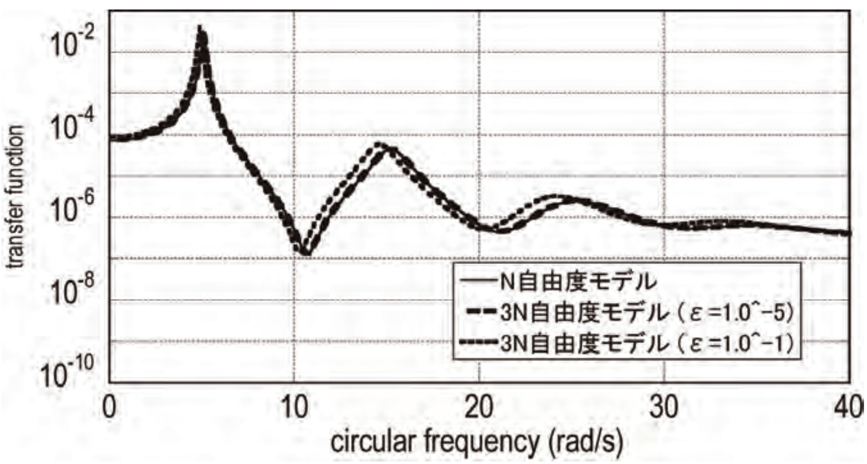


図 4-7 N 自由度モデルと 3N 自由度モデルにおける伝達関数の比較

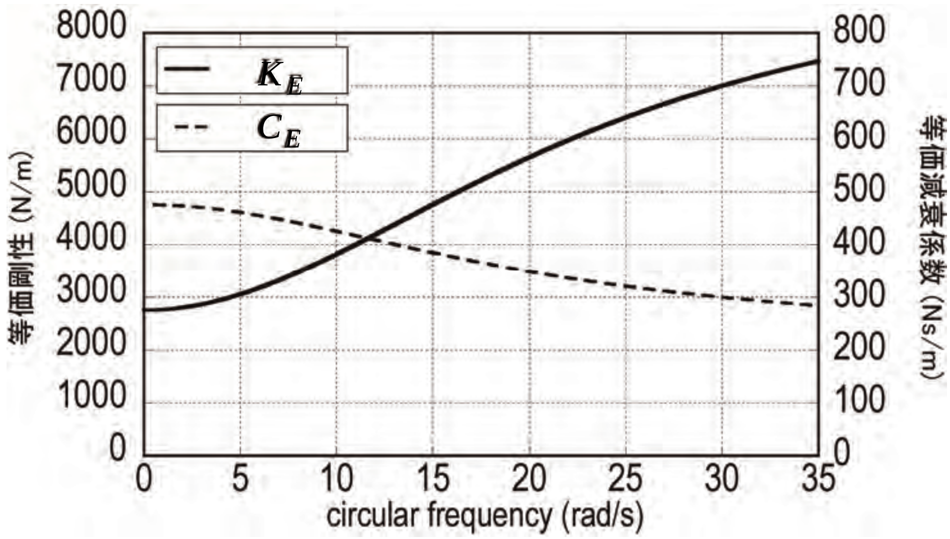


図 4-8　支持部材付粘弾性ダンパーの等価剛性ならびに等価減衰係数の振動数特性

4.5.2 制約条件と性能クライテリアの設定

支持部材の初期剛性k_bと建物モデルが有する水平剛性k_fの剛性比($\equiv k_b / k_f$)は，一般に 0.3~3.0 程度であるとされている。ダンパー未付加時における初期の構造物モデルにおいては，剛性比を 1.0 として, 支持部材剛性の初期値を与えるものとする。また, 支持部材の降伏軸力は$\bar{P}_y = 750\mathrm{kN}$とし，ここでは，支持部材の降伏軸力は支持部材剛性と線形従属の関係にあると仮定する。すなわち，支持部材剛性が増加に伴い，支持部材降伏軸力が単調に増加する。VED の全面積$\bar{W}$を決定する上で，設計者が要求する性能としてここでは最大層間変形角を取り扱う。，5 層モデルで$\bar{W} = 50.0[m^2]$とし，10 層モデルでは$\bar{W} = 400[m^2]$とする。

4.5.3 最大応答値を評価する上でのピークファクターの設定

支持部材軸力に関する制約条件や性能クライテリアを設ける上で, 設計者が主として対象とする構造物の応答は，最大値であることが一般的である。これまでに本論文では主として構造物の応答の標準偏差（≈二乗平均値平方根：但し，層間変位の時間に対する平均値は 0 の場合に限る）を対象としたものであり，最大値を評価する際には標準偏差にピークファクターを別途乗じる必要がある。本節では，時刻歴応答解析により得られた最大応答値と本手法により得られた応答値を比較し，適切なピークファクターの設定方法について検証する。

構造物の地震時応答の標準偏差を評価する際には，入力地震動のパワースペクトル密度関数$S_g(\omega)$が必要である。$S_g(\omega)$を再掲すれば地動加速度のフーリエ振幅スペクトル$\left|F(\mathrm{i}\omega)\right|$を用いて次式で表わされる。

$$S_g(\omega) = \frac{\left|F(\mathrm{i}\omega)\right|^2}{2\pi T_L} \tag{4-51}$$

ここにT_Lは，対象とする時刻歴波形データの継続時間である。主要な振動成分に対して十分に小さい入力レベルのデータ（0 データ等）が多く含まれる場合は，全データを用いて$S_g(\omega)$を算定すると(4-51)式におけるT_Lが大きくなるため，$S_g(\omega)$のレベルは小さくなる。一方，振動成分が卓越す

る任意の時間幅をウィンドーとして抽出すると，(4-51)式における継続時間がT_Lが小さくなるため，一般に$S_g(\omega)$はレベルが大きくなる。$S_g(\omega)$のレベルは，構造物応答の標準偏差に直接的に影響を及ぼすので，どのようなT_Lを用いるかに十分に留意する必要がある。

図 4-9(a~d)では，種々の記録地震波に対して時刻歴応答解析を行い，最大層間変位ならびに層間変位時刻歴応答の標準偏差と，振動数領域において層間変位に関する伝達関数ならびに Auto PSD 関数から算定した変位応答の標準偏差を比較する。パワースペクトル密度関数を求める際には，(A) 全時刻歴データを用いる，(B) 最大加速度応答時の前後 20 秒，(C) 最大加速度応答時の前後 30 秒を考慮した。ただし，最大加速度応答となる時刻が地震動記録の早期に生じた場合は，0 s からのデータ列を適用することとした。(A),(B)および(C)の条件下で実際の記録地震波を評価する際の継続時間を表 4-4 に示す。図 4-10 には(A)，(B)および(C)により得られるそれぞれの地震動の PSD 関数$S_g(\omega)$を図示した。図 4-10 に示すように，全時刻歴データを地震動の継続時間とみなすと，PSD 関数が過小に評価されることが確認できる。

以上より得られた時刻歴最大応答値と時刻歴応答データから算出した標準偏差およびピークファクター(最大値/標準偏差)を表 4-5 に示す。同表より，ピークファクターが 10 を超える場合もあり，ばらつきが非常に大きいことが理解できる。これは Tomakomai 波や，JMA Kobe 波では時刻歴データ数が多く，標準偏差値が低くなることに起因する[1]と思われる。地震波の特性を把握するためには，より多くの地震波について検証を行う必要がある。

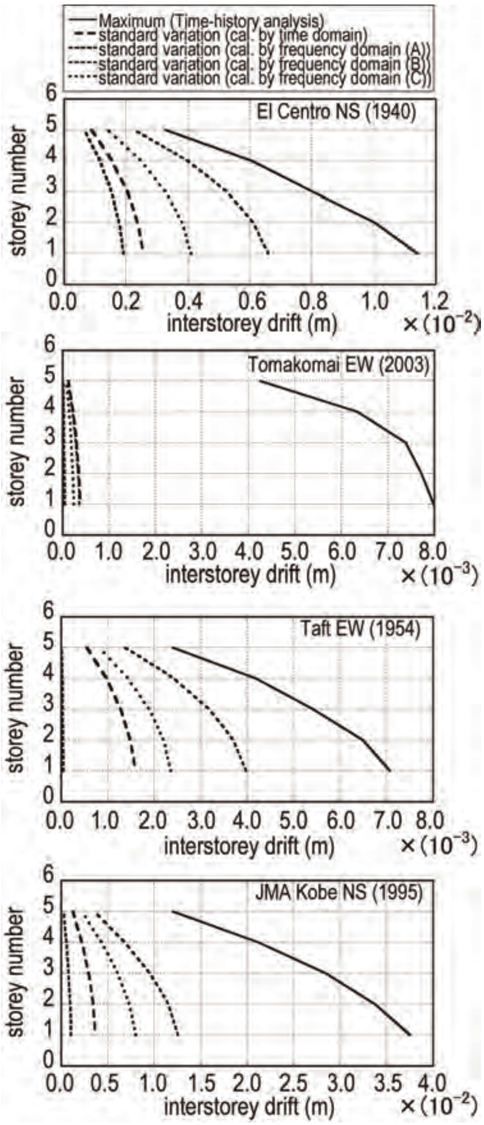
1) 時刻歴応答解析を適当な時間(50 秒程度等)で終了した時の応答値を用いた標準偏差は，表 1 に記したものよりも大きくなることを確認した。

表 4-4　Auto PSD 関数を算定した際の地震動継続時間

地震名	(A)	(B)	(C)
El Centro NS 1940	53.75[s]	22.14[s]	32.14[s]
Tomakomai EW 2003	180.0[s]	40.0[s]	60.0[s]
Taft EW 1954	54.39[s]	23.72[s]	33.72[s]
JMA Kobe 1995	150.0[s]	28.54[s]	38.54[s]

表 4-5　種々の地震動に対する層間変位応答に関するピークファクター

地震名	最大応答(時刻歴)	標準偏差 (時刻歴応答より計算)	ピークファクター
El Centro NS 1940	0.01143 [m]	0.00257 [m]	4.450
Tomakomai EW 2003	0.00799 [m]	0.00039 [m]	20.61
Taft EW 1954	0.00708 [m]	0.00161 [m]	4.403
JMA Kobe 1995	0.03756 [m]	0.00370 [m]	10.14



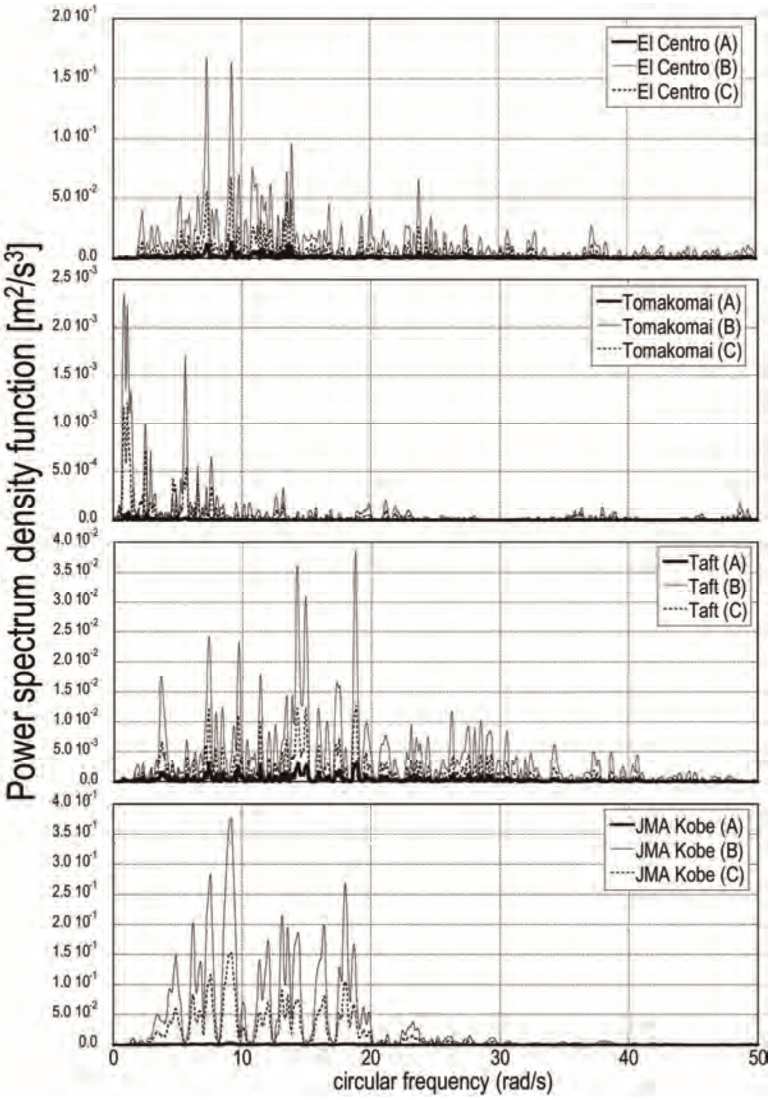


図 4-9 種々の記録地震波に対する最大応答値と標準偏差ならびに振動数領域で評価した標準偏差応答の比較
(a) El Centro NS (1940)
(b) Tomakomai EW (2003)
(c) Taft EW (1954)
(d) JMA Kobe NS (1995)

図 4-10 種々の記録地震波における PSD 関数を算定する上での継続時間の違いによる Auto PSD 関数の比較
(A) 全時刻歴データ
(B) 最大加速度応答時の前後 20 秒
(C) 最大加速度応答時の前後 30 秒

検証②　模擬波を用いたモンテカルロシミュレーションによるピークファクター分布の検証

検証①で行ったいくつかの地震波記録による時刻歴応答解析から得られたピークファクターは,いずれの場合も 3 以上となっていた。より多くのデータを検証することによりピークファクターの設定に関するより信頼性の高い分析を行う必要がある。ここでは，指定した Auto PSD 関数を有する模擬波を生成し,模擬波に対する時刻歴応答解析から得られるピークファクターの分布についてモンテカルロシミュレーションを行った。Auto PSD 関数は矩形の有帯域ホワイトノイズとし，(a) 0~10[rad/s]，(b) 10~20[rad/s] (c) 20~30[rad/s] (d) 30~40[rad/s] (e) 40~50[rad/s] の 5 つの区間で s=0.15[m^2/s^3] のパワーレベルを有するものとした(図 4-11 左)。また，図 4-11 中央には，前述した矩形 PSD に対応する時刻歴波形の 1 サンプルを示し，図 4-11 右では，有限なパワーを有する帯域の異なる 5 つの矩形 PSD に対応した加速度入力波形を多数生成し，時刻歴応答解析により得られた最大応答と標準偏差から評価したピークファクターを入力外乱の最大加速度を横軸にとり,それぞれの入力外乱群に対して図示した。図 4-11 より，ピークファクターの分布は入力外乱の特性に依存して多少異なる傾向があるが,最大地動加速度が大きいほどピークファクターの値も相対的に大きくなっているといえる。

一般的によく知られているピークファクターは,対象とする外乱として風外乱を扱ったものが多く,入力が定常的な場合が多い。しかしながら，地震動を対象とする場合では，一般的に入力外乱は振幅が時間変化する非定常性を有するため,定常的な入力を対象として得られているピークファクターの知見をそのまま適用することは適切とは言い難い。すなわち，地震動の非定常性を考慮し経時特性を与える包絡関数を乗じた地震動外乱モデルを用いる場合では，図 4-12 に示すように入力の振幅が時間ともに変化する経時特性を有するため入力の特性に依存して応答レベルが低下する。従って，風外乱のような定常状態を対象としたピークファクターに対して,応答の非定常性により標準偏差が小さくなることにより，地震動等の非定常性の強い入力に対する最大値-標準偏差関係を表すピークファクターは大きくなると予測される。

図 4-13 は，図 4-11(a)および(b)で扱った入力特性を対象に包絡関数を考慮しない場合におけるピークファクターの分布との比較を示した。図 4-14 では，図 4-13(b)に示したピークファクター分布をヒストグラムで図示したものである。表 4-6 では，包絡関数の有無による入力特性の違いに対するピークファクター分布の平均値ならびに 95%信頼区間の上下限値をまとめた。表 4-6 より，定常的な入力(envelop 考慮なし)では，ピークファクターの分布は， 2.5~3.0 に分布していることを確認し，これは周知の事実と合致する。一方，包絡関数を乗じることにより地震動の定常性を考慮した場合では，前者よりも大きく 4.0 程度までなっている。

以上のことから,地震動に対する最大応答値を評価する上で応答の標準偏差ならびにピークファクターを用いる場合は地震動の非定常性について留意する必要があり，今回の MCS の結果に基づけば信頼性の高い最大応答評価(安全側)を行うためには，ピークファクターを 4.0~5.0 を用いる方が適切であるといえる。

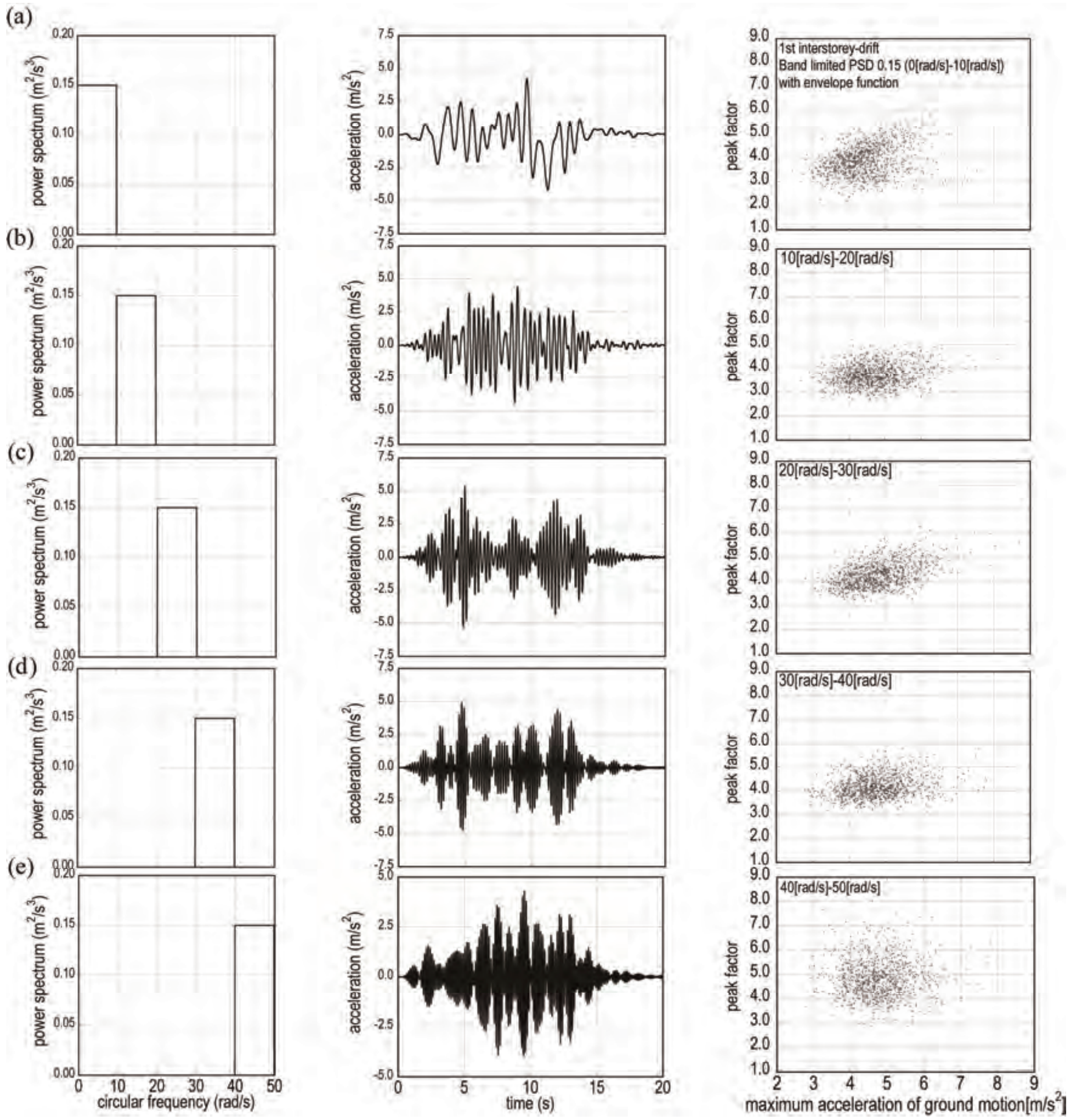


図 4-11 (a-e) 矩形 Auto PSD 関数に対するピークファクター分布の比較

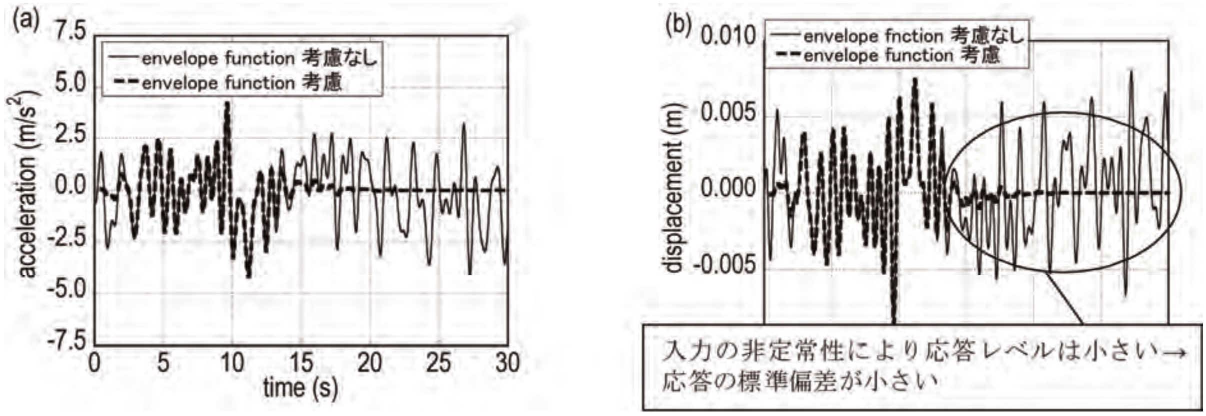


図 4-12 経時特性を与える包絡関数を考慮することによる応答の非定常性

(a) 入力外乱 (b) 時刻歴応答

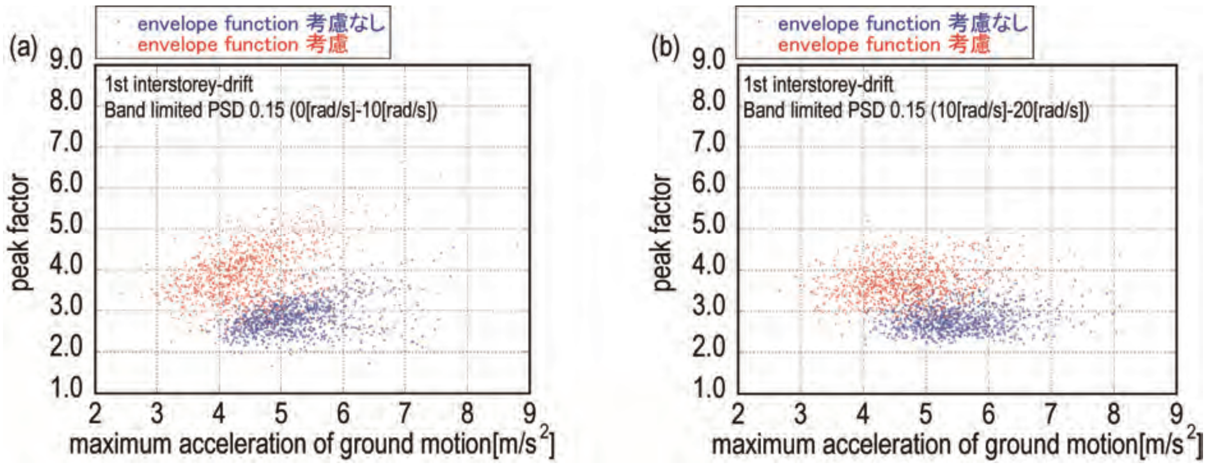


図 4-13 包絡関数の考慮の有無によるピークファクター分布の比較

(a) 矩形 PSD 0-10[rad/s], (b) 矩形 PSD 10-20[rad/s]

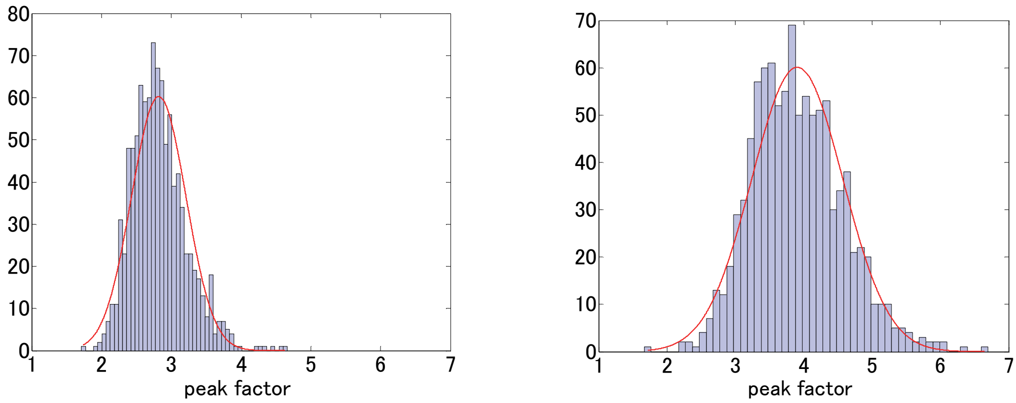


図 4-14 ピークファクターの分布に関するヒストグラム

(a) 包絡関数考慮なし(定常入力), (b) 包絡関数考慮(非定常入力)

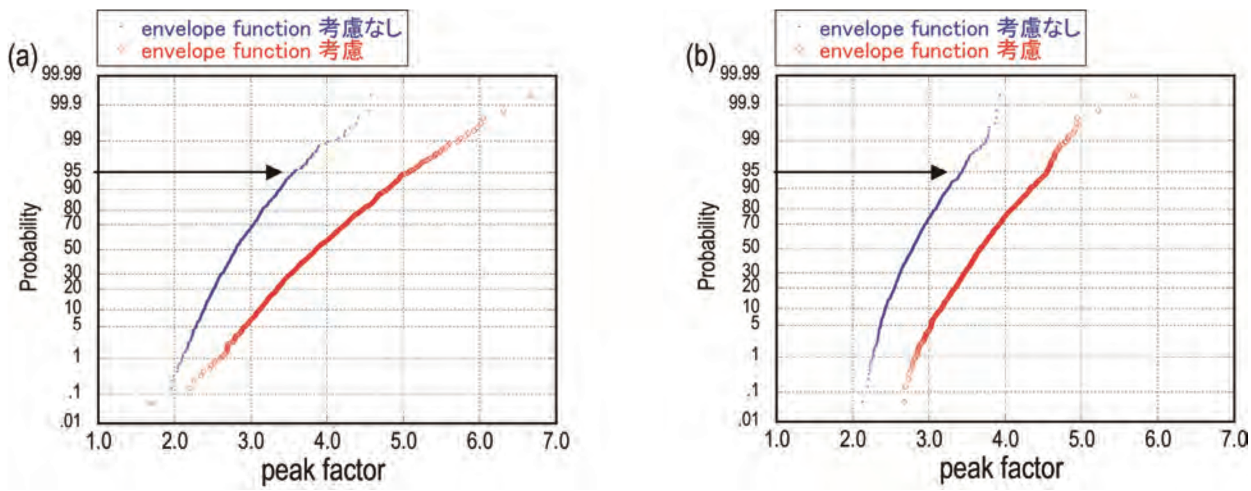


図 4-15 ピークファクターの累積分布関数の比較

(a) PSD 関数 0~10 [rad/s] (b) PSD 関数 10~20[rad/s]

表 4-6 ピークファクター分布の分布特性

	包絡関数なし	包絡関数考慮
平均値	2.8208	3.9069
95%信頼区間上限	2.8451	3.9482
95%信頼区間下限	2.7966	3.8654

4.5.4 最適設計例

本節では, 前節までに示したモデルパラメターに対して本最適設計法を適用した結果得られる最適解を提示し，本手法の有効性や妥当性について検証を行う。

図 4-16 は，最適設計プロセスにおいて漸増するダンパー総量に対する 1 次感度，すなわち評価関数 f の設計変数に対する勾配ベクトルを 5 層建物モデル，10 層建物モデルについて図示したものである。ここで取り扱う建物モデルでは，いずれの場合も初期の段階で 1 層のダンパー付加に対する感度が最も大きい。このように 1 層へのダンパー付加に対する勾配ベクトルが最大であるとは，1 層へのダンパー付加により評価関数 f が最も低減することを意味する。従って，次頁で示すダンパー付加の変化の様子においても確認できるように, 勾配ベクトルに基づいて初期の段階では 1 層のみにダンパー付加が励起される。一方，ある程度ダンパーが付加されていくと，勾配ベクトルが複数の層で一致している。これはダンパー付加による応答低減効果が等しいことを意味し，4.4 節で記述したように最適性条件に基づいて複数の層へのダンパーを付加する必要が生じる。勾配ベクトルが一致したのちも，当該層に対する評価関数の 1 次感度が一致し続けており，勾配ベクトルの変化の様子から 4.4 節で構築した解法アルゴリズムが有効に働いていることを確認することが出来る。

図 4-17 は，最適なダンパー配置解の推移および 1 次減衰定数を図示したものであり，図 4-17(a)では，N 自由度モデルならびに 3N 自由度モデルを用いた場合での最適解の比較も行った。両者の VED のモデル化の違いが最適設計解に及ぼす影響はほとんど見られないことが分かる。しかしながら，最適設計プロセスが進行すると，若干の誤差が生じていることも確認できる。これは，数値的な誤差が蓄積することに起因すると考えられる。以降では，N 自由度モデルのみを対象とした解析例を提示することとする。

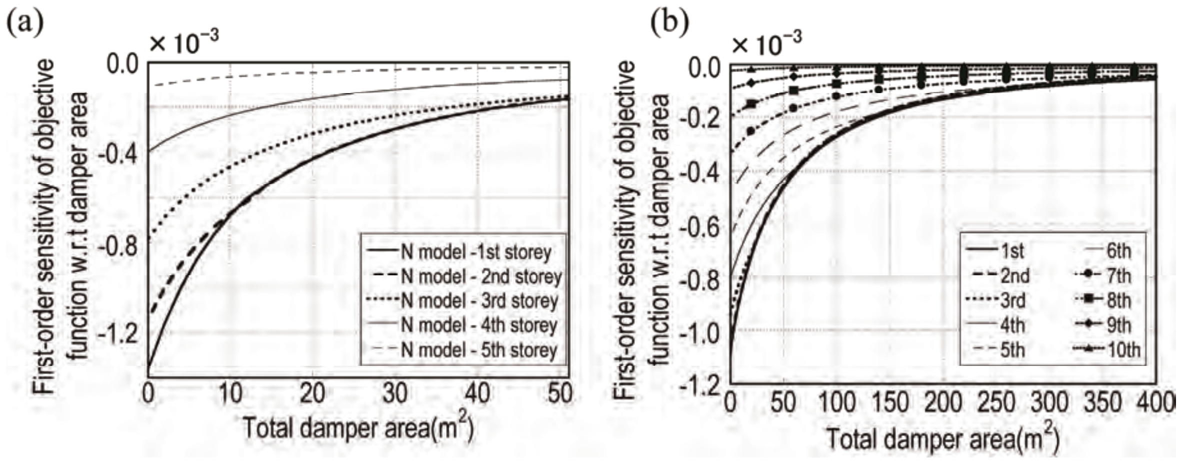


図 4-16 ダンパー量に対する 1 次感度(勾配ベクトル)の変化　(a) 5 層モデル, (b) 10 層モデル

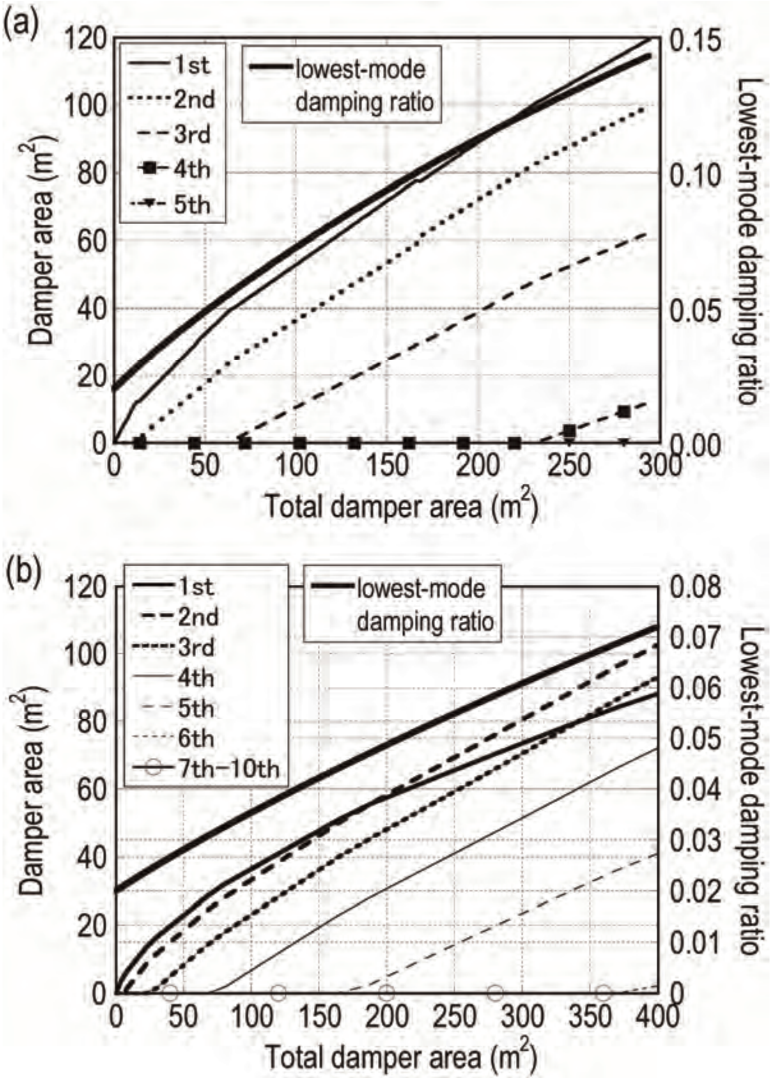


図 4-17 最適ダンパー配置ならびに 1 次減衰定数の推移

(a) 5 層モデル, (b) 10 層モデル

図 4-18 では, 指定した性能を満足した際に得られるダンパー量に対する最適な VED 配置解をそれぞれ図示したものである。評価関数を層間変位の二乗平均値和とする場合は低層の変形を抑えることを目的として低層により多くのダンパーを配置したほうが効率的であることが分かる。

図 4-19 は，支持部材剛性ならびに支持部材に作用する軸力の変化を図示したものである。ダンパーが付加されると，支持部材に作用する軸力が増加する。これにより，支持部材に作用する軸力が強度に達する(支持部材に関する制約条件がアクティブになる)と支持部材剛性の設計変更を行い支持部材に関する制約条件を満足し続ける。図から支持部材剛性の変更が行われていることが分かる。しかしながら, 初期の支持部材剛性に対して最終的に得られた 1 層の支持部材剛性は 6 倍程度にもなっており，強度をよりあらかじめ増大させる(例えば，支持部材の断面積を大きくする)など改善の余地があると思われる。

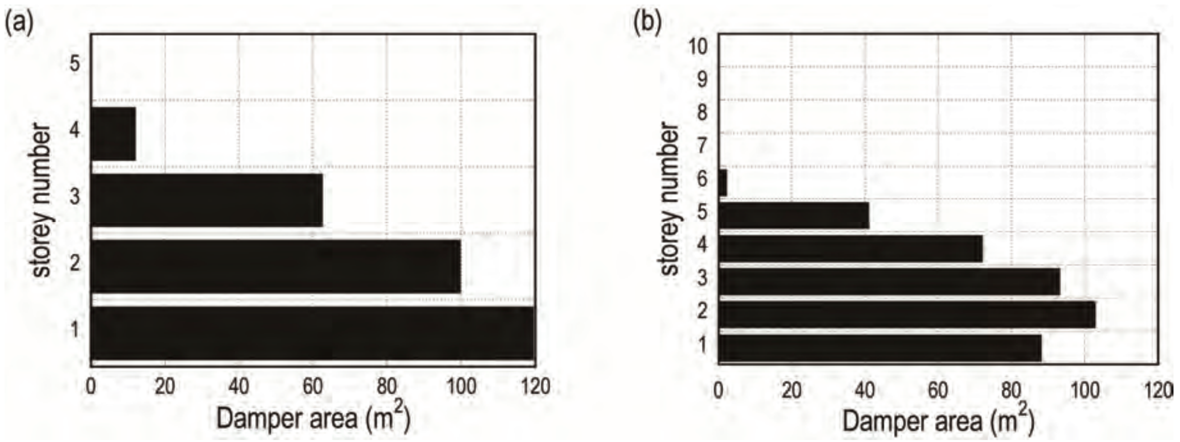


図 4-18 指定したダンパー総量における最適ダンパー配置解

(a) 5 層モデル, (b) 10 層モデル

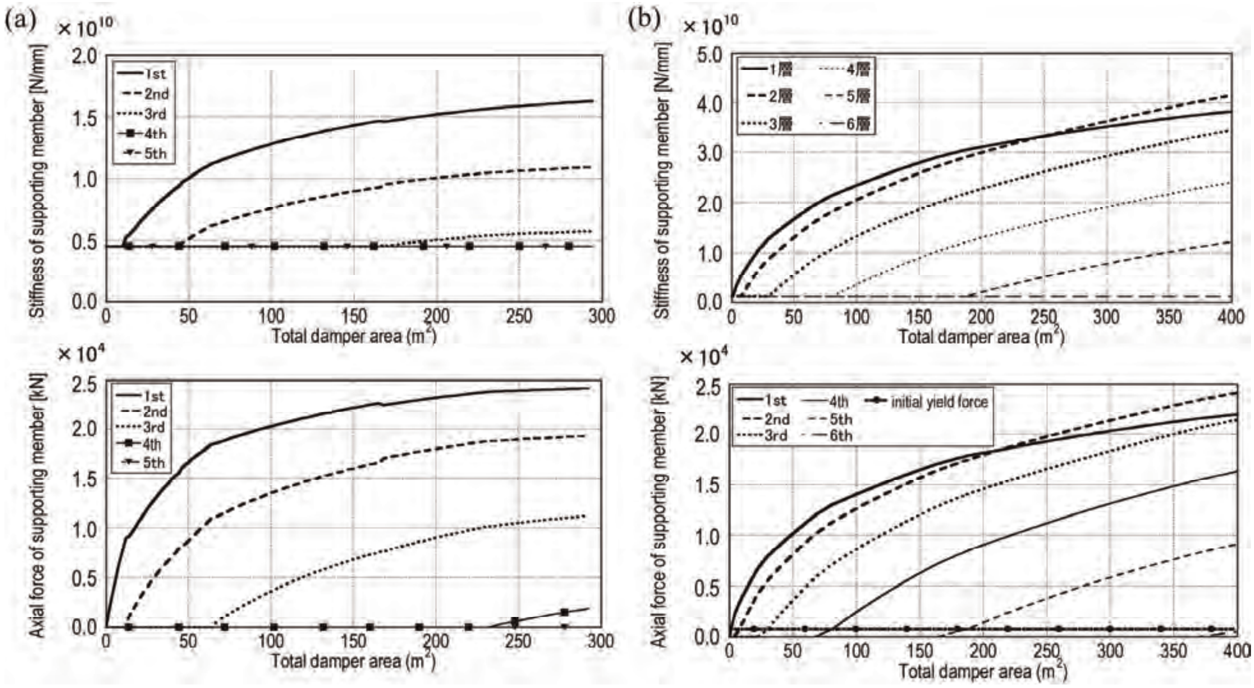


図 4-19 支持部材剛性の変化(上段)と支持部材に作用する軸力の変化(下段)

(a) 5 層モデル, (b) 10 層モデル

図 4-20 は，ダンパー付加に伴う評価関数の変化を図示したもので，比較のために異なる 2 つのダンパー配置(全層に一様にダンパーを配置する Uniform Placement ならびに 1 層のみに全ダンパーを付加する 1st Storey Alone)についても考慮した。これらを比較すると異なる配置法に比べて提案手法による最適配置解に対する評価関数である層間変位の二乗平均値和は，効率よく低減されており，本提案手法が有効であることが示された。

また，図 4-21 では図 4-20 で行った検証をさらに広い意味で捉えて，5 層建物モデルに対して各 VED 配置量のレベルに応じて各層にランダムにダンパーを配置した際に得られる評価関数の分布を示したものである。ここでは，各ダンパー量のレベルごとにランダム配置パターンを一様乱数により生じさせたモデルを 100 組生成した。同図よりいずれのランダム配置解に対する評価関数よりも最適配置解により得られた評価関数が下限となっていることが確認できる。

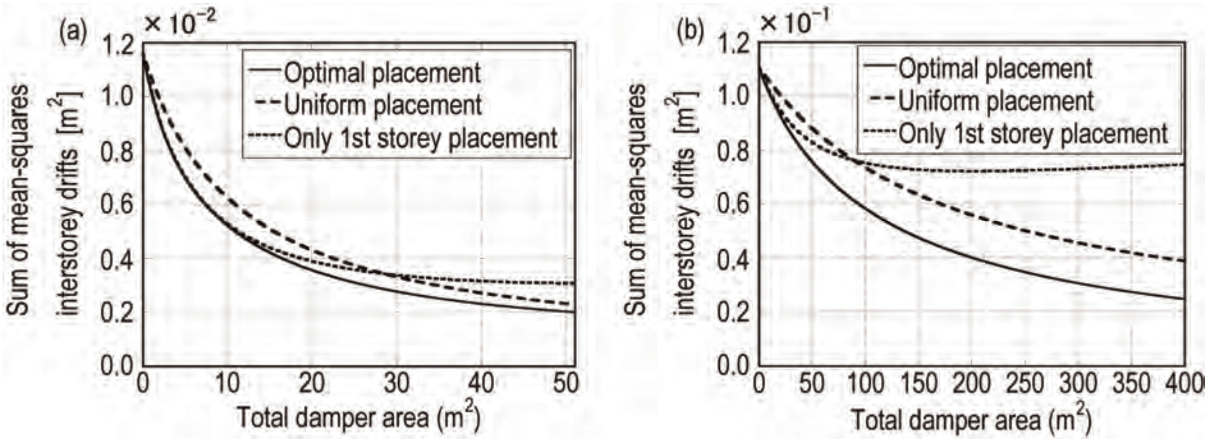


図 4-20 最適ダンパー配置による応答低減の推移と種々のダンパー配置解との比較
(a) 5 層モデル, (b) 10 層モデル

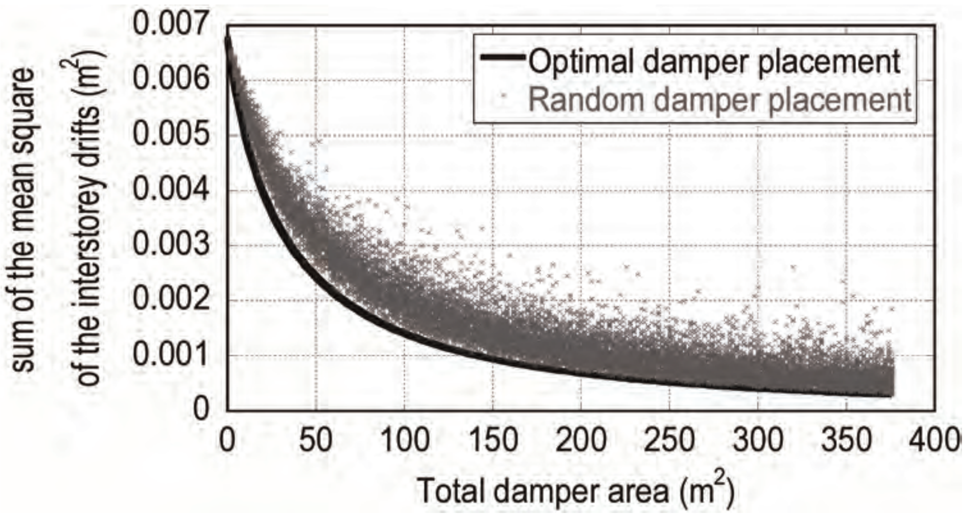


図 4-21 最適ダンパー配置ならびにランダムダンパー配置による応答低減の推移の比較

図 4-22 は，剛性比($\equiv k_b / k_f$)が最適ダンパー配置設計に与える影響について示したもので，(a) $k_b / k_f = 0.5$，(b) $k_b / k_f = 3.0$ の場合についてそれぞれ図示したものである。図より，支持部材剛性が層剛性に対して相対的に低い場合は，高層部へのダンパー付加も励起されることが確認できる。このように支持部材剛性の強さは最適なダンパー配置解に及ぼす影響は少なくないため, 設計時には支持部材剛性にも十分に留意する必要がある。

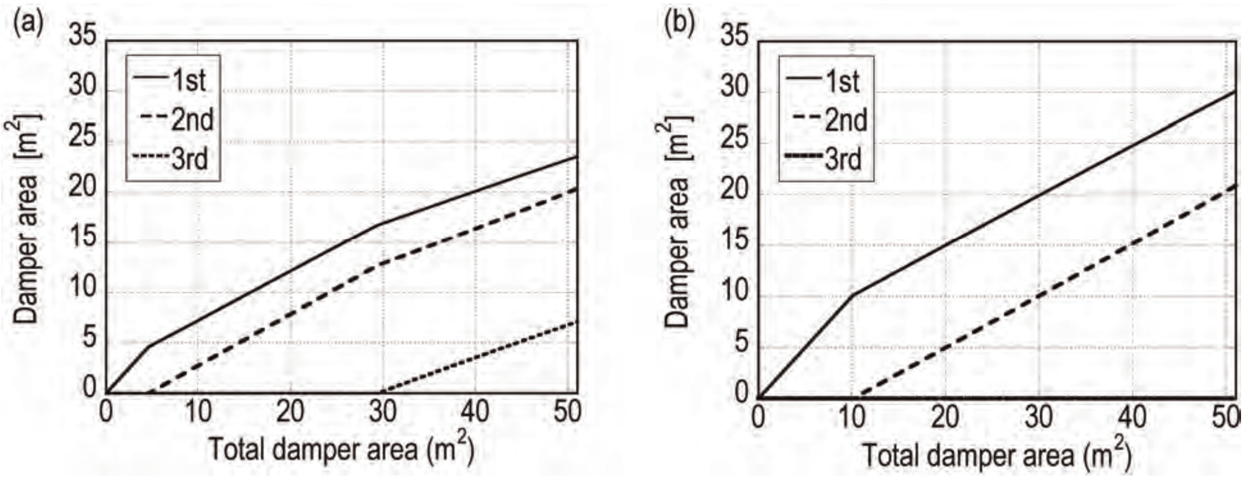


図 4-22 剛性比(支持部材剛性/フレーム剛性)の違いが最適ダンパー配置に及ぼす影響
(a) $k_{bi} / k_{fi} = 0.5$, (b) $k_{bi} / k_{fi} = 3.0$

本節では，各層の VED の面積分布ならびに各層の支持部材剛性を設計変数とした最適設計問題において，5 層および 10 層せん断質点系建物モデルに対する数値シミュレーションを実施した。解法アルゴリズムとしては，4.4 節で構築した勾配型最適化手法を用いており，ダンパー総量を漸増させた際の勾配ベクトルの変化の様子を図示した図 4-16 より，本手法が有効に作用していることを確認した。

図 4-17 は本手法により得られた，VED 配置の推移の様子を示したもので，前述の図 4-16 に示した勾配ベクトルによる感度情報に基づいて，VED 面積の最適配置化が行われていることを確認することが出来る。また，VED の配置量に依存して支持部材に作用する軸力は増大する。4.2.4 節で記述したように，本最適化問題では支持部材に作用する軸力が規定値(例えば，降伏軸力の 2/3)に達した際には, 支持部材剛性の設計変更を行うことで降伏軸力を割り増すことを支持部材に関する制約を緩和する。図 4-18 に示した支持部材に作用する軸力の変化ならびに支持部材剛性の変化をそれぞれみれば，支持部材剛性の設計変更が適切に行われていることを確認することが出来る。

本最適化手法により得られた最適設計解の妥当性を検証する目的で, 最適配置解とは異なるダンパー配置に対する評価関数（＝層間変位の二乗平均応答の総和)の比較を図 4-20 に示している。比較対象としては, 各層に一様にダンパーを配置した場合ならびに 1 層のみにダンパーを配置した場合とした。さらに図 4-21 では本最適化手法により得られた配置解がグローバル最適解となっていることを数値的に明らかにしており，同図は本手法の妥当性・有用性を顕著に表わしている。

4.6　結論

本章では，既往の極限外乱理論に基づき設定された入力に対して，取り付け部材の影響を考慮した粘弾性ダンパーを有する構造物の層間変位の二乗平均値の和を目的関数として最適設計問題を定式化し，その解法アルゴリズムを構築した。本章により得られた結論は以下の通りである。

1)　<u>粘弾性ダンパーならびに支持部材剛性を設計変数とする最適設計問題</u>

種々のパッシブダンパーの中でも粘弾性ダンパーは減衰のみならず付加剛性を有するため，振動数依存性・ひずみ依存性など複雑な力学的特性を有している。本章では，4 要素モデルで表わされるアクリル系粘弾性ダンパーを対象として，その支持部材剛性を考慮した最適設計問題を構築した。さらに，ダンパー配置による応答低減効果は，支持部材剛性の影響を大きく受けることが知られている。そこで，本章における最適ダンパー配置問題においては支持部材に作用する軸力を評価対象として加えて，ダンパー配置のみならず支持部材剛性を設計変数とする新しい最適設計問題を展開した。すなわち，支持部材に作用する軸力を制約条件として考慮し，支持部材に作用する軸力が規定値に達すると支持部材剛性の設計変更を行うものとしている。支持部材剛性の設計変更はシステムの構造物特性に少なからず影響を及ぼすため，最適なダンパー配置解にも影響を与える結果となることを明らかにした。

2)　<u>変動極限外乱に対する最適設計問題の展開</u>

本最適設計問題においては，構造物に対して最悪な応答を与える入力外乱の特性が，粘弾性ダンパー(VED)の配置ならびに支持部材剛性の変動に伴うシステムの構造物特性の変化に応じて変動する変動極限外乱を定義した。すなわち，支持部材剛性を考慮した VED の付加に伴う構造物の 1 次固有振動数と共振するようなパワースペクトル密度関数(有帯域ホワイトノイズ)を変動極限外乱のパワースペクトル密度関数として定めた。変動極限外乱，すなわち，共振的な入力に対して評価関数を最小化するような最適なダンパー配置および支持部材剛性を見出すことにより，様々な入力に対しても応答に関する制約を満足することが可能であると考えられる。

3)　<u>勾配型最適化アルゴリズムの構築</u>

本最適設計問題における評価関数は，層間変位の二乗平均応答の総和であり，振動数領域による定式化により陽に表現することが可能である。そこで，評価関数の設計変数に対する勾配ベクトル(1 次感度)ならびに Hessian マトリックス(2 次感度)をそれぞれ陽に導出し，ラグランジュ未定乗数法に基づく勾配型最適化アルゴリズムを提示した。本最適化手法では，初期の状態ではダンパー未付加状態であり，漸増するダンパー総量に応じて最適設計解を随時導出していくため，設計者が意図する任意の性能を満足する最適設計解を得ることができる。

4)　<u>ダンパーモデルの違いによる比較</u>

支持部材を考慮した 4 要素モデルで表わされる VED を等価 Kelvin-Voigt モデルに置換した N 自由度モデル(N モデル)と各要素の両端の相対変位を直接取り扱う 3N 自由度モデル(3N モデル)を比較し，N モデルを用いて極めて精度よく種々の応答（層間変位ならびに支持部材に作用する軸力）を評価することが可能であることを示した。

5) 最適設計例による最適化手法の妥当性

5 層モデルおよび 10 層モデルに対して本最適化アルゴリズムを適用した数値解析例を示した。その結果，1 次感度の変動に伴い各層に適切に VED が配置されていき，支持部材に作用する軸力に関する制約条件により支持部材剛性の変更が適切に行われていることを確認した。本最適化手法の妥当性を検証するために, 本章で展開した最適化アルゴリズムにより得られた最適設計解に対する評価関数の変化と, 各ダンパー配置量においてランダムにダンパーを配置した場合の評価関数の変化をモンテカルロシミュレーションにより比較し, 本アルゴリズムが提示した最適設計解は応答低減効果が最も大きくなることを示した。このことから本手法により得られた最適解がグローバル最適解であることを示しており，本手法の妥当性および有用性を提示した。

参考文献

Attard T.L. (2007). “Controlling all interstory displacements in highly nonlinear steel buildings using optimal viscous damping”, *J. Struct. Eng., ASCE*, **133**(9), pp1331-1340.

Cimellaro G.P. (2007). “Simultaneous stiffness-damping optimization of structures with respect to acceleration, displacement and base shear”, *Eng. Struct.*, **29**, pp2853-2870.

Constantinou M. C., Tadjbakhsh, I. G. (1983). “Optimum design of a first story damping system”, *Comp. & Struct.* **17**(2), pp305-310.

De Silva C.W. (1981). “An algorithm for the optimal design of passive vibration controllers for flexible systems”, *J. Sound Vib.* **74**(4): pp495-502.

Drenick R.F. (1970). Model-free design of aseismic structures, *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, **96**(EM4), 483-493.

Fujita K., Moustafa A., Takewaki I. (2010). “Optimal placement of viscoelastic dampers and supporting members under variable critical excitations”, *Earthquakes and Structures*, 1(1), pp43-67.

Garcia D.L. (2001). “A simple method for the design of optimal damper configurations in MDOF structures”, *Earthq. Spectra*, **17**(3), pp387-398.

Gurgoze M., Muller P.C. (1992). “Optimal positioning of dampers in multi-body systems”, *J. Sound Vib.* **158(3)**, pp517-530.

Hahn G.D., Sathiavageeswaran K.R. (1992). “Effects of added-damper distribution on the seismic response of buildings”, *Comput. & Struct.* **43(5)**, pp 941-950.

Kiu W., Tong M., Wu Y., Lee G. (2004). “Optimized damping device configuration design of a steel frame structure based on building performance indices”, *Earthq. Spectra*, **20**(1), pp67-89.

Lavan O., Levy R. (2005). “Optimal design of supplemental viscous dampers for irregular shear-frames in the presence of yielding”, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **34**(8), pp889-907.

Lavan O., Levy R. (2006). “Optimal design of supplemental viscous dampers for linear framed structures”, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **35**(3), pp337-356.

Levy R., Lavan O. (2006). “Fully stressed design of passive controllers in framed structures for seismic loadings”, *Struct. Multidisc. Optim.*, **32**(6),pp 485-498.

Liu W., Tong M., Wu X., Lee, G. (2003). “Object-oriented modeling of structural analysis and design with application to damping device configuration”, *J. Computing in Civil Eng., ASCE*, **17**(2), pp113-122.

Marano G..C., Trentadue F., Greco, R. (2007). “Stochastic optimum design criterion for linear damper devices for seismic protection of building”, *Struct. Multidisc. Optim.* **33**, pp441-455.

Takewaki I. (1997). “Optimal damper placement for minimum transfer functions”, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **26**(11), pp1113-1124.

Takewaki I. (2000). “Optimal damper placement for critical excitation”, *Prob. Eng. Mech.*, **15**(4), pp 317-325.

Takewaki I. (2006). *Critical excitation methods in earthquake engineering*, Elsevier Science, Amsterdam.

Takewaki I. (2009). *Building control with passive dampers: Optimal performance-based design for earthquakes*. John Wiley & Sons (Asia), Singapore.

Takewaki I., Yoshitomi S., Uetani K., and Tsuji M. (1999). “Non-monotonic optimal damper placement via steepest direction search”, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **28**(6), pp655-670.

Trombetti T., Silvestri S. (2004). “Added viscous dampers in shear-type structures: The effectiveness of mass proportional damping”, *J. Earthq. Eng.*, **8**(2), pp275-313.

Tsuji M., Nakamura T. (1996). “Optimum viscous dampers for stiffness design of shear buildings”, *J. Struct. Des. of Tall Buildings*, **5**, pp217-234.

Uetani K., Tsuji M., Takewaki I. (2003). Application of optimum design method to practical building frames with viscous dampers and hysteretic dampers, *Eng. Struct.*, **25**(5), pp579-592.

Viola E., Guidi F. (2008). “Influence of the supporting braces on the dynamic control of buildings with added viscous dampers”, *Struct. Control Health Monitoring*, **16**(3), pp 267-286.

石井正人，北村春幸，和田　章，笠井和彦，(2000) 粘弾性型制振部材付き架構のモデル化に関する検討，日本建築学会構造系論文集　第531号　P.55-62.

笠井和彦，寺本道彦，大熊　潔，所　　健, (2001) 粘弾性体の温度・振動数・振幅依存を考慮した構成則(その１　線形領域における温度・振動数依存のモデル化)，日本建築学会構造系論文集，第543号, pp.77-86.

笠井和彦，岩崎啓介, (2006) さまざまな形式の制振構造における自由度縮約法と水平バネ系への変換法，日本建築学会構造系論文集，第605号, pp37-46.

曽田五月也，高橋雄司，(1997) ランダム加力による粘弾性ダンパーの振動数依存性の定量化，日本建築学会構造系論文集，第498号, pp.43-49.

曽田五月也，和田純一，平田裕一，山中久幸，(1994) 繰返加力実験にもとづく粘弾性ダンパーの力学モデルの構築，日本建築学会構造系論文集，第457号, pp.29-36.

高橋雄司，曽田五月也, (1998) 一般化マックスウェルモデルにより模擬される粘弾性ダンパーを有する構造物の応答解析方法，日本建築学会構造系論文集，第511号，pp.85-91.

竹脇　出, (2001) 変動クリティカル外乱に対するグローバル性能最大化設計，日本建築学会構造系論文集 第539号, pp63-69.

竹脇　出，大森道孝，辻　聖晃，吉田亘利，上谷宏二，(2001) アクリル系粘弾性ダンパーを用いた応答制御設計骨組のランダム波振動実験，構造工学論文集, Vol.47B, pp181-186.

李有震，竹脇出，上谷宏二，(2002) 粘弾性ダンパー付き骨組の単純化力学モデルの構築とその設計法への適用，第11回日本地震工学シンポジウム, pp1685-1688.

第 5 章　層間変位伝達関数の最大振幅の最小化を目標とする最適ダンパー配置法

5.1　伝達関数を用いた最適設計法の意義

地震動の特性は極めて不確定性が高く予測が困難であり，特定の入力地震波に対する構造物応答に関して最適設計化を行うことは，如何なる入力外乱に対しても有効であると保証されるわけではない。このような問題を解決するために第 4 章では，対象とする入力地震動を構造物の固有円振動数と共振するような極限的入力として扱うことで入力外乱の不確定性を考慮した。しかしながら，極限的入力を扱うことにより応答が過度に大きくなるため，最大層間変形角などの構造物が満たすべき性能クライテリアの設定が適切かどうかの工学的な判断が求められる。

このような不確定な入力に対する最適ダンパー配置問題を考える上で, Bai らや山本らは H^{∞}制御理論に基づいて H^{∞}ノルムを評価関数とした建築構造物に対する粘性ダンパーの最適配置問題を提示している。H^{∞}制御理論は，アクティブ制御工学の分野において，不確定な未知外乱に対する制振性能の向上を目的とし，優れたロバスト安定性を得ることができる点で古典制御理論にはない優位性を有している。H^{∞}制御理論は，現在でも精力的に研究がおこなわれており，既に確立した理論として成熟期を迎えつつある。ここで，H^{∞}ノルムとは，H^{∞}制御理論における標準的な評価基準であり，全周波数領域における伝達関数マトリクスの最大特異値の上限値を表す。これは，1 質点系の場合は，伝達関数の最大振幅値に相当するものである。伝達関数は，入力の特性に依存せず構造物パラメターから直接的に導かれる指標である。従って，伝達関数を用いた最適設計問題を扱うことにより，いかなる入力に対しても安定した振動抑制効果を有するダンパー配置解を導くことが可能であると期待できる。そこで，本章では，入力特性に拠らない建物モデル固有の層間変位伝達関数の最大振幅値を評価関数とする最適ダンパー配置問題について定式化した上で，その最適化問題の解法アルゴリズムを提示する。さらに，前章で展開した極限外乱入力に対する最適ダンパー配置解と比較することで伝達関数を用いたダンパーの最適配置を考えることの有用性について示す。

5.2　層間変位伝達関数を用いた最適配置問題

本節では，本章で展開する最適ダンパー配置問題における評価関数である層間変位伝達関数を導出し，最適ダンパー配置問題の記述を行う。なお，伝達関数導出時には前章と似た表現や，同じパラメター等も存在するが，ここでは改めてパラメターの定義を再度記述した上で，同じ形式の式についても再掲する。

本章では，粘性ダンパーを有する N 層せん断型構造物モデルを対象とする。ここで，m_i，$k_{\mathrm{f}i}$，$c_{\mathrm{f}i}$，および $c_{\mathrm{d}i}$ $(i=1,\cdots,N)$ は，それぞれ第 i 層における質量，層剛性，構造減衰およびダンパーによる付加減衰係数を表す。地動に対する変位応答 $\mathbf{u}=\{u_1,\cdots,u_N\}$ および地動加速度 $\ddot{u}_{\mathrm{g}}(t)$ のフーリエ変換を $\mathbf{U}(\omega)$，$\ddot{U}_g$ とすれば，付加ダンパーを有する建物モデルの振動数領域における運動方程式は次式で表わされる。

$$\left(-\omega^2\mathbf{M}+\mathrm{i}\,\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\mathbf{U}(\omega)=-\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{U}_g(\omega) \tag{5-1}$$

ここに，$\mathbf{M}$，$\mathbf{C}$，$\mathbf{K}$ および $\mathbf{r}$ は，質量マトリクス，構造減衰とダンパーによる付加減衰の和である減衰マトリクス，剛性マトリクスおよび各成分が 1 である係数ベクトルを表す。(5-1)式より，$\mathbf{U}(\omega)$ は次のように表わされる。

$$\mathbf{U}(\omega)=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\ddot{U}_g(\omega) \tag{5-2}$$

ここに$\mathbf{A}$ および$\mathbf{B}$ は次式で定義される。

$$\mathbf{A}=-\omega^2\mathbf{M}+\mathrm{i}\,\omega\mathbf{C}+\mathbf{K} \tag{5-3a}$$

$$\mathbf{B}=-\mathbf{M}\mathbf{r} \tag{5-3b}$$

振動数領域における層間変位$\boldsymbol{\Delta}(\omega)$ は，隣接する床の水平変位$\mathbf{U}(\omega)$ の差分により得られるので，次式で求められる。

$$\Delta(\omega)=\mathbf{T}\mathbf{U}(\omega) \tag{5-4}$$

ここに$\mathbf{T}$ は，$\mathbf{U}(\omega)$ から$\boldsymbol{\Delta}(\omega)$ へ変換する 1,-1,0 の成分で構成される変換マトリクスである。(5-2)式および(5-4)式より地動に対する層間変位の伝達関数$\mathbf{H}_\delta(\omega)$ は次式で表わされる。

$$\mathbf{H}_\delta(\omega)=\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \tag{5-5}$$

前章でも示したように，(5-5)式で表わされるような構造物の応答伝達関数に外乱のパワースペクトル密度関数を振動数領域において乗じたうえで振動数に関する積分を行えば，二乗平均応答を評価することが可能である。従って，不確定な外乱に対して応答を効率よく低減するためには，周波数領域における入力から応答への増幅率を表す伝達関数振幅値を低減することが非常に有効なアプローチであると考えられる。本章で扱う最適ダンパー配置問題における評価関数 f を次式で定義する。

$$f=\max_{\omega,i}\left\{\left|H_{\delta i}(\omega)\right|\right\} \tag{5-6}$$

ここに$\left|H_{\delta i}(\omega)\right|$ は，$\mathbf{H}_\delta(\omega)$ の第 i 成分を表し，各層の層間変位に関する伝達関数である。(5-6)式は，各層の層間変位伝達関数の最大振幅値を表す。すなわち，本章で展開する最適ダンパー配置問題における評価関数は，層間変位伝達関数において入力が最も増大される振動数ならびに層位置に関する最大振幅値である。前章で展開した最適ダンパー配置問題とは異なり，本評価関数では構造特性のみで表わされる伝達関数の入力増幅特性に着目することになる。従って，本章における最適ダンパー配置問題とは前章に比較してより簡易にダンパー配置解を求めることが可能であると考えられる。

以上より本章における最適ダンパー配置問題は次のように記述する。

$$\begin{aligned}
&\text{Find} && c_{\mathrm{d}i} \quad (i=1,\cdots,N)\\
&\text{To minimize} && f(\mathbf{c}_\mathrm{d})=\max_{\omega,i}\left\{H_{\delta i}(\omega)\right\}\\
&\text{Subject to} && \sum_{i=1}^{N} c_{\mathrm{d}i}\le \overline{W}_\mathrm{c}\\
& && 0\le c_{\mathrm{d}i}\le \overline{c}_\mathrm{d}\ (i=1,\cdots,N)
\end{aligned} \tag{5-7}$$

ここに$\overline{W}_\mathrm{c}$ および$\overline{c}_\mathrm{d}$ は，付加ダンパーの総量および各層に設置可能なダンパー量の上限値を表す。

本問題に対するラグランジアンは次のように記述される。

$$L(\mathbf{c}_\mathrm{d},\lambda,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\mu})=f(\mathbf{c}_\mathrm{d})+\lambda\left(\mathbf{c}_\mathrm{d}-\overline{W}_c\right)+\sum_{i=1}^{N}\gamma_i{}^T\left(0-c_{\mathrm{d}i}\right)+\sum_{i=1}^{N}\mu_i{}^T\left(c_{\mathrm{d}i}-\overline{c}_d\right) \tag{5-8}$$

ここに$\boldsymbol{\gamma}=\{\gamma_i\}$および$\boldsymbol{\mu}=\{\mu_i\}$はラグランジュ乗数ベクトルであり，$\lambda$はラグランジュ乗数である。

(5-8)式において各層に配置するダンパー量の上下限制約がアクティブではない場合の設計変数$\mathbf{c}_{\mathrm{d}}$に関する最適性条件$L(\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0},\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0})$は次のように表わされる。

$$f_{,i}+\lambda=0 \qquad (0<c_{\mathrm{d}i}<\overline{c}_{\mathrm{d}}) \tag{5-9}$$

ここに$(\ )_{,i}$は，第i層ダンパーの付加減衰係数$c_{\mathrm{d}i}$に関する偏微分を表す。

一方，ダンパー量の上下限制約がアクティブになる場合の最適性条件は次のように表わされる。

$$f_{,i}+\lambda\geq 0 \qquad (c_{\mathrm{d}i}=0) \tag{5-10}$$

$$f_{,i}+\lambda\leq 0 \qquad (c_{\mathrm{d}i}=\overline{c}_{\mathrm{d}}) \tag{5-11}$$

本最適ダンパー配置問題における評価関数は，層間変位伝達関数振幅の最大値であり，ダンパーの付加と共に評価関数そのものが変更される可能性がある。すなわち，初期の段階では，1 層の層間変位伝達関数振幅が最大となっているが，ダンパーの付加によりこれが低減され異なる層における伝達関数の振幅値が大きくなることが想定される。このような場合には評価関数が 1 層の伝達関数から他の異なる層における伝達関数に切り替わってしまうため，一般的に評価関数の設計変数に対する感度が不連続となる点に留意する必要がある。

5.3 最適設計問題の解法

本章で扱う最適ダンパー配置問題に対する解法アルゴリズムとしては，評価関数を最も効率よく低減するダンパー配置を感度解析により解析的に求める方法を用いる。以下にアルゴリズムのフローを示す。

Step 1　構造フレームの設計を行う。

Step 2　微小付加ダンパー量$d\overline{c}_{\mathrm{d}}$を設定する。

Step 3　最大振幅値となる層位置を特定する。

Step 4　ダンパーの付加により評価関数を最小化する最適な層位置を感度解析により求める。

Step 5　1 次感度$f_{,i}$が一致する層数をカウントする。

Step 6A　1 次感度が最大となる層が 1 層のみの場合は，当該層にダンパーdc_{d}を付加し，評価関数を更新する。

Step 6B　複数の層で 1 次感度が一致する場合は，最適性条件を満足し続ける，すなわち 1 次感度が等しくなるような解を求め，当該層にダンパーを付加し，評価関数を更新する。

規定のダンパー総量$\overline{W}_{\mathrm{c}}$に到達するまで Step 3~6 を繰り返すことにより最適ダンパー配置解が得られる。尚，ダンパーが未付加状態を初期状態とする。図 5-1 に，フローチャートを示す。

Step 6B では微小ダンパー増分量を複数の層に分配する必要がある。具体的な最適ダンパー量を決定するための解法アルゴリズムを示す。1 次感度が一致する層の層数およびその層位置をそれぞれn_c，$p_i \quad (i=1,\cdots,n_c)$とすれば，一次感度が複数の層で一致する場合は次の等式が成立する。

$$f_{,p_1}=f_{,p_2}=\cdots=f_{,p_{nc}} \tag{5-12}$$

Step 6B では，評価関数と 1 次感度は次のように更新される。

$$f\rightarrow f+\sum_{i=p_1}^{p_{n_c}} f_{,i}\Delta c_{\mathrm{d}i} \tag{5-13}$$

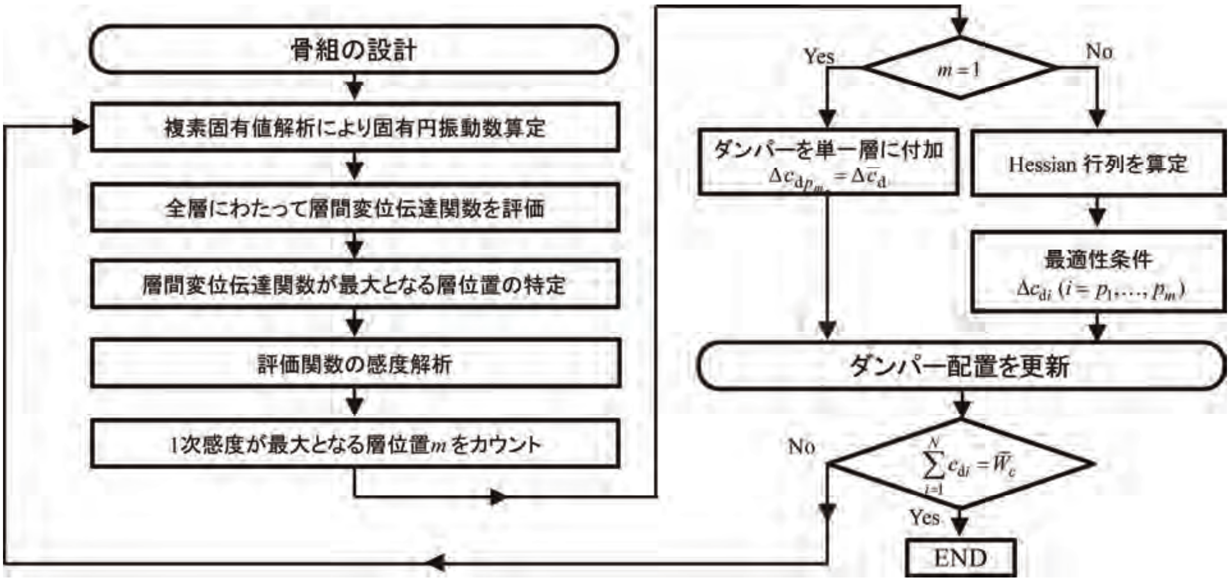


図 5-1 最適ダンパー配置問題の解法フローチャート

$$f_{,j} \to f_{,j} + \sum_{i=p_1}^{p_{n_c}} f_{,ji}\Delta c_{\mathrm{d}i} \tag{5-14}$$

更新後も(5-12)式を満足し続けるダンパー配置が最適解であるので，未知数である $\Delta\mathbf{c}_{\mathrm{d}}=\{\Delta c_{p_1},\cdots,\Delta c_{p_{nc}}\}$ に関する n_c-1 個の関係式が(5-15)式のように得られる。

$$f_{,p_1} - f_{,p_j} + \sum_{i=p_1}^{p_{n_c}} \left(f_{,p_1 i} - f_{,p_j i} \right)\Delta c_{\mathrm{d}i} = 0 \qquad (j=2,\cdots,n_c) \tag{5-15}$$

さらに $\Delta\mathbf{c}_{\mathrm{d}}$ の和は，微小付加ダンパー量 $d\bar{c}_{\mathrm{d}}$ に等しくなるので，次式を満たす必要がある。

$$\sum_{i=p_1}^{p_{n_c}} \Delta c_{\mathrm{d}i} = d\bar{c}_{\mathrm{d}} \tag{5-16}$$

(5-15),(5-16)式より，$\Delta\mathbf{c}_{\mathrm{d}}$ に関する線形連立方程式が次式のように得られ，これを解くことにより最適なダンパー付加量 $\Delta\mathbf{c}_{\mathrm{d}}$ が求められる。

$$\begin{bmatrix} f_{,p_1p_1} - f_{,p_2p_1} & & f_{,p_1p_m} - f_{,p_2p_m} \\ & \ddots & \\ f_{,p_{m-1}p_1} - f_{,p_mp_1} & & f_{,p_{m-1}p_m} - f_{,p_mp_m} \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta c_{\mathrm{d}p_1} \\ \vdots \\ \Delta c_{\mathrm{d}p_m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d\bar{c}_{\mathrm{d}} \end{Bmatrix} \tag{5-17}$$

本手法では，評価関数 f の設計変数 $\mathbf{c}_{\mathrm{d}}$ に対する 1 次感度 $f_{,i}$ (Step 4)および 2 次感度 $f_{,ij}$ (Step 6B)が必要となる。一般的に最適化問題で必要となる感度情報が解析的に求められない場合では，数値微分が用いられるが，(5-6)式で記述される本論文で扱う評価関数は，設計変数により陽に表わされるため，$f_{,i}$ および $f_{,ij}$ は以下のように表わすことができる。ここで，評価関数が最大となる層位置ならびに振動数をそれぞれ n，ω_0 とし，$(\ )^*$ は複素共役を表すこととする。

$$f_{,i} = \frac{1}{\left|H_{\delta n}(\omega_0)\right|} \mathrm{Re}[H_{\delta n}(\omega_0)_{,i} H_{\delta n}^{*}(\omega_0)] \tag{5-18}$$

$$f_{,ij} = \left(\alpha\left|H_{\delta n}(\omega_0)\right| - \beta\right) / \left|H_{\delta n}(\omega_0)\right|^2 \tag{5-19}$$

$$\alpha = \mathrm{Re}[H_{\delta n,ij} H_{\delta n}^{*} + H_{\delta n,i} H_{\delta n}^{*}{}_{,j}] \tag{5-20a}$$

$$\beta = \mathrm{Re}[H_{\delta n,i} H_{\delta n}^{*}]\mathrm{Re}[H_{\delta n,j} H_{\delta n}^{*}] \tag{5-20b}$$

ここで，$H_{\delta n}\left(\omega_0\right)_{,i}$ および $H_{\delta n}\left(\omega_0\right)_{,ij}$ は次式で表わされる。

$$H_{\delta n}\left(\omega_0\right)_{,i} = \mathbf{T}_n \mathbf{A}_{\omega_0}{}_{,i}^{-1}\mathbf{B} \tag{5-21a}$$

$$H_{\delta n}\left(\omega_0\right)_{,ij} = \mathbf{T}_n \mathbf{A}_{\omega_0}{}_{,ij}^{-1}\mathbf{B} \tag{5-21b}$$

$\mathbf{T}_n$ および $\mathbf{A}_{\omega_0}$ は，変換マトリクス $\mathbf{T}$ の第 n 行および(5-3a)式で表わされる $\mathbf{A}$ に $\omega = \omega_0$ を代入したものである。(5-21a)式において $(\mathbf{A}_{\omega_0}{}^{\mathbf{-1}})_{,i}$ は，$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ を $\mathbf{c}_\mathrm{d}$ で微分することにより得られ，次式で表わされる。

$$(\mathbf{A}_{\omega_0}{}^{\mathbf{-1}})_{,i} = \mathbf{A}_{\omega_0}{}^{-1}\mathbf{A}_{\omega_0,i}\mathbf{A}_{\omega_0}{}^{-1} \tag{5-22}$$

粘性ダンパーを用いる場合は, ダンパーを付加することにより生成される減衰マトリクス $\mathbf{C}_\mathrm{d}$ のみを考慮すればよく，$\mathbf{A}_{\omega_0,i}$ は次式で表わされる。

$$\mathbf{A}_{\omega_0,i} = \mathrm{i}\,\omega_0 \mathbf{C}_{\mathrm{d},i} \tag{5-23}$$

粘性ダンパーの場合は，ダンパー容量と付加減衰係数が線形の関係であるため，(5-23)式における $\mathbf{C}_{\mathrm{d},i}$ は，1,0 のみの成分で構成され，容易に表現される。

また(5-21b)式において $(\mathbf{A}_{\omega_0}{}^{\mathbf{-1}})_{,ij}$ は，(5-22)式をさらに設計変数で微分することにより次のように表わされる。ただし，$\mathbf{C}_{\mathrm{d},ij} = \mathbf{0}$ であることに留意する。

$$\begin{aligned}&(\mathbf{A}_{\omega_0}{}^{\mathbf{-1}})_{,ij}\\&= \mathbf{A}_{\omega_0}{}^{-1}\left(\mathbf{A}_{\omega_0,i}\mathbf{A}_{\omega_0}{}^{-1}\mathbf{A}_{\omega_0,j} + \mathbf{A}_{\omega_0,j}\mathbf{A}_{\omega_0}{}^{-1}\mathbf{A}_{\omega_0,i}\right)\mathbf{A}_{\omega_0}{}^{-1}\end{aligned} \tag{5-24}$$

5.4　5 層および 10 層せん断型建物モデルに対する最適設計例

本節では，本章で展開した最適ダンパー配置法を適用し，5 層および 10 層せん断型建物モデルへの最適ダンパー解を示す。建物モデル（$N = 5,10$）の諸元を表 5-1 に示す。剛性分布は各層で同一とする。構造減衰は,

表 5-1 構造物諸元

	5 層	10 層
各層質量[kg]	512000	1024000
各層剛性[N/m]	1.559×10^9	1.809×10^9
骨組 1 次固有周期[s]	0.400	1.000

剛性比例型で減衰定数を0.02とする。

図5-2は，(5-18)式で表わされる評価関数の設計変数に対する1次感度(5層建物モデル)の変化を図示したものである。本問題では，評価関数が層間変位に関する伝達関数の最大振幅値となる層位置を見出す必要がある。

図5-3は，ダンパーの最適配置に伴う，5層建物モデルの層間変位伝達関数振幅の推移を全層にわたって図示したものである。図5-3より，ダンパー付加量が少ない段階では，第1層の層間変位伝達関数振幅が最大となるため，評価関数としては1層層間変位伝達関数が選定されることになる。図5-3において，ダンパー総量が4.0×10⁷[Ns/m]付近になると，第1層と第2層の層間変位伝達関数がほぼ一致するようになる。この際には，評価関数が2層層間変位伝達関数に入れ替わることがあるため，図5-2に見られるように1次感度関数 $f_{,i}$ が不連続に切り替わる結果となっている。

図5-4(a),(b)は，5層建物モデルにおいて最適なダンパー配置に伴う，第1層および第2層層間変位伝達関数の設計変数$\mathbf{c}_{\mathrm{d}} = \{c_{\mathrm{d}1}, c_{\mathrm{d}2}, c_{\mathrm{d}3}, c_{\mathrm{d}4}, c_{\mathrm{d}5}\}^T$ に対する1次感度の変化を図示したものである。図5-2に示した評価関数 f の設計変数$\mathbf{c}_{\mathrm{d}}$に対する1次感度では，評価関数そのものが切り替わることが起こるため不連続となっていたが，図5-4(a)および(b)に示すように第1層，第2層の層間変位伝達関数の設計変数に対する1次感度は，当然ながら連続関数となる。いずれの場合もダンパー付加量が少ない初期の段階では，$c_{\mathrm{d}1}$に対する感度が最も大きいが，ダンパー付加量が増えてくると，各層の層間変位伝達関数を低減させるためには当該層にダンパーを付加することにより振動制御の効果が高い。

図5-5(a),(b)は，5層および10層建物モデルにおける最適ダンパー配置の推移を図示したものである。付加ダンパー総量$\bar{W}_{\mathrm{c}}$は，5層，10層モデルでそれぞれ，7.40×10⁷[Ns/m]，6.91×10⁸[Ns/m]とする。これは第1層が有する構造減衰の30倍，60倍にそれぞれ相当する。本手法では，指定したダンパー総量における最適配置解が得られるだけでなく，任意のダンパー付加量における最適ダンパー配置が得られる。

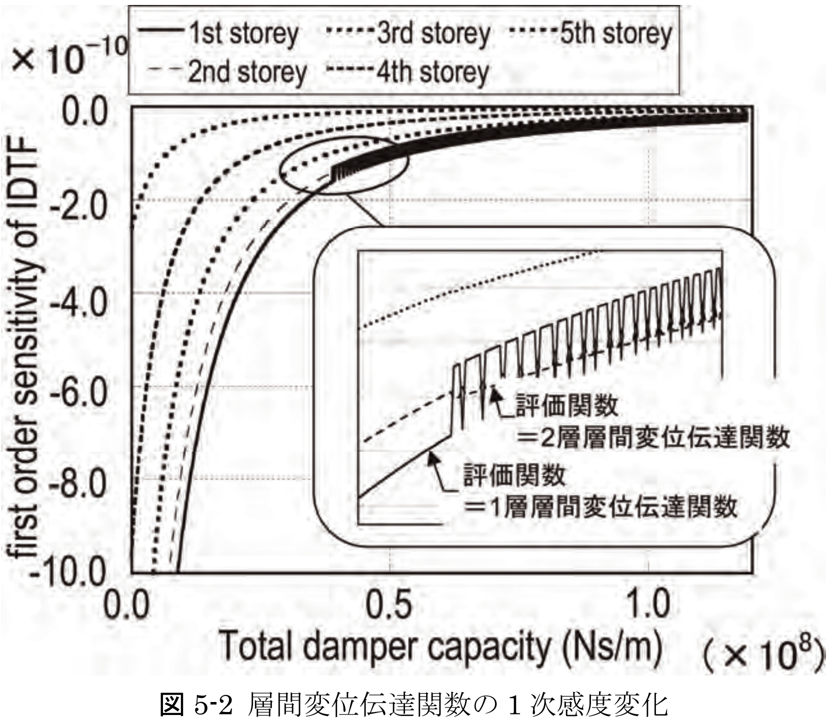


図 5-2 層間変位伝達関数の1次感度変化

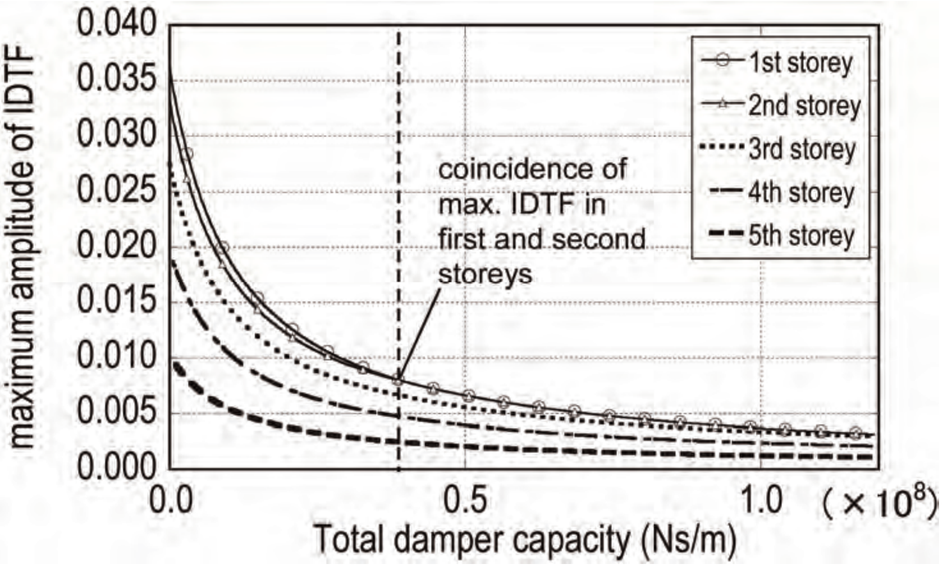


図 5-3 ダンパー付加に対する層間変位伝達関数の最大振幅値の変化

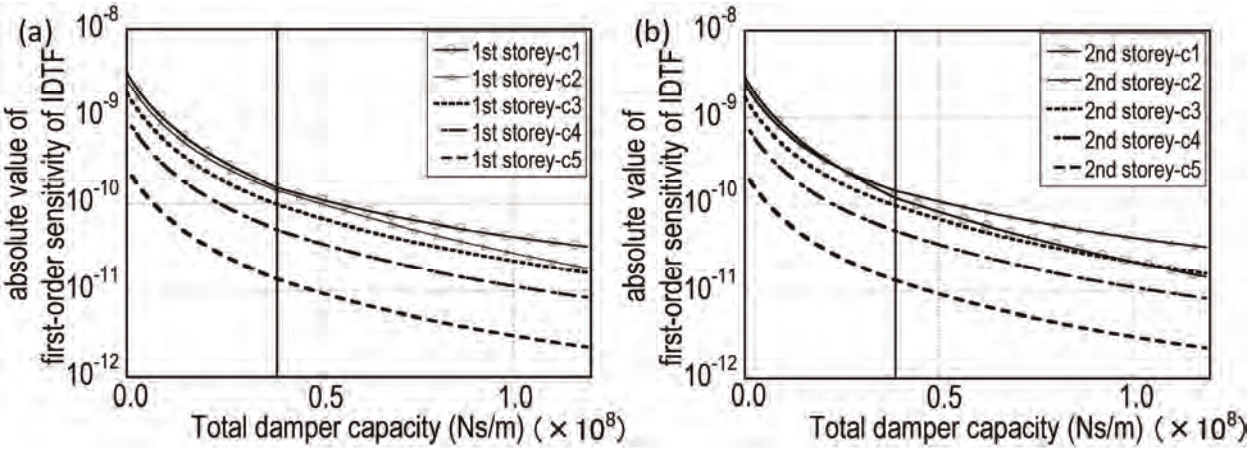


図 5-4 ダンパー付加に対する層間変位伝達関数の最大振幅値の変化
(a) 1 層層間変位伝達関数, (b) 2 層層間変位伝達関数

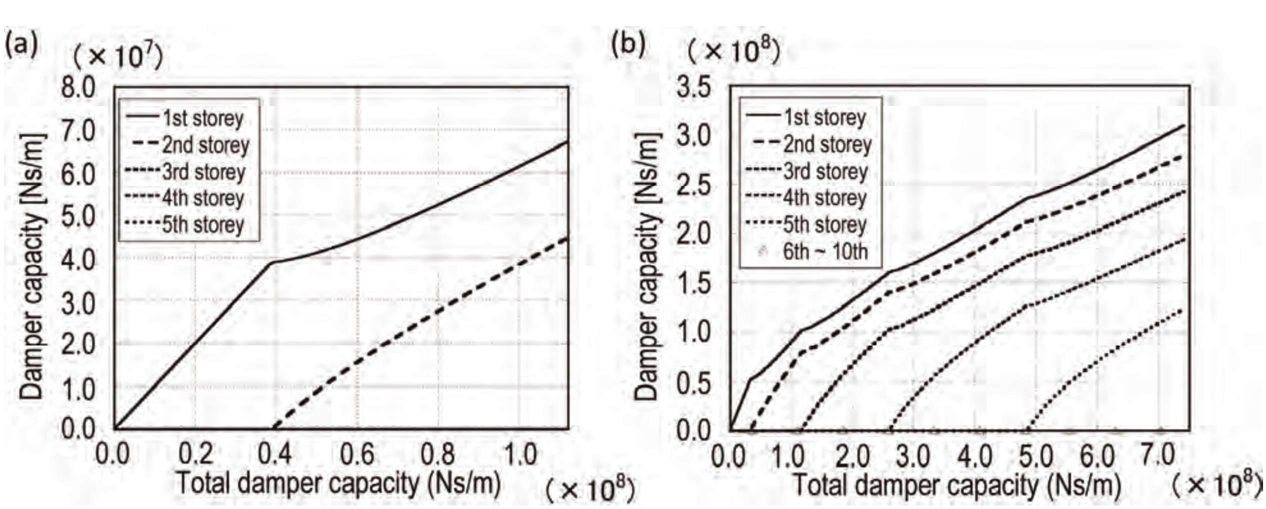


図 5-5 最適ダンパー配置の推移
(a) 5 層建物モデル, (b) 10 層建物モデル

図 5-6(a),(b)は，指定したダンパー総量において最終的に得られる最適ダンパー配置量を棒グラフで図示したものである。比較のために，異なる 2 つの手法により得られた最適配置解も同図中に図示してある。比較として行った一つ目の手法は，最適化問題を解く上で一般的に知られている逐次 2 次計画法(=Sequential Quadratic Programming)である。逐次 2 次計画法は，制約付き非線形最適化問題の各反復において，部分近似問題として 2 次計画問題を解くことにより探索方向を決定し，最適解を求める手法である。逐次 2 次計画法では，初期点から最も近傍の最適解を探索するため，初期値依存性がある。そこで，図 5-6 では，初期配置として全層にわたってダンパー未付加状態$\mathbf{c}_\mathrm{d} = \{0,\cdots,0\}^T$および全層にわたって付加ダンパーを均等に配置$\mathbf{c}_\mathrm{d} = \{\bar{W}_c / N,\cdots,\bar{W}_c / N\}^T$した場合について解析を行った。図中の凡例では，それぞれ general SQP(no damper)，general SQP(uniform)と記してある。さらに本手法との比較として 2 つ目の手法として本章 5-1 節で紹介した H$^\infty$ノルム最適化問題である。本章における最適ダンパー配置問題を H$^\infty$ノルム最適設計問題として記述したものを Appendix に記す。改めて図 5-6 を見ると，5 層および 10 層建物モデルともに本章で提案した最適ダンパー配置問題における最適解は，H$^\infty$ノルム最適化問題の解と似た傾向であることが分かる。H$^\infty$ノルム最適化問題における解のほうが高層へのダンパー付加がより励起されている結果となっているが，これは評価関数の違いにより，伝達関数振幅が上層へ行くほど減少するためであると考えられる。また，逐次 2 次計画法では，5 層モデルでは，前述の二つの手法では見られなかった第 3 層へのダンパー付加も励起されている。また，10 層建物モデルにおいては初期値に依存して低層部へのダンパー配置量が大きく異なっており，また提案手法により得られる最適配置解と比べて第 1 層により多くのダンパーを付加する結果となり，信頼性の乏しい結果となった。次に実際に得られた最適配置解に対する評価関数，すなわちそれぞれの最適化手法により得られたダンパー配置解を適用した際の層間変位伝達関数を比較する。

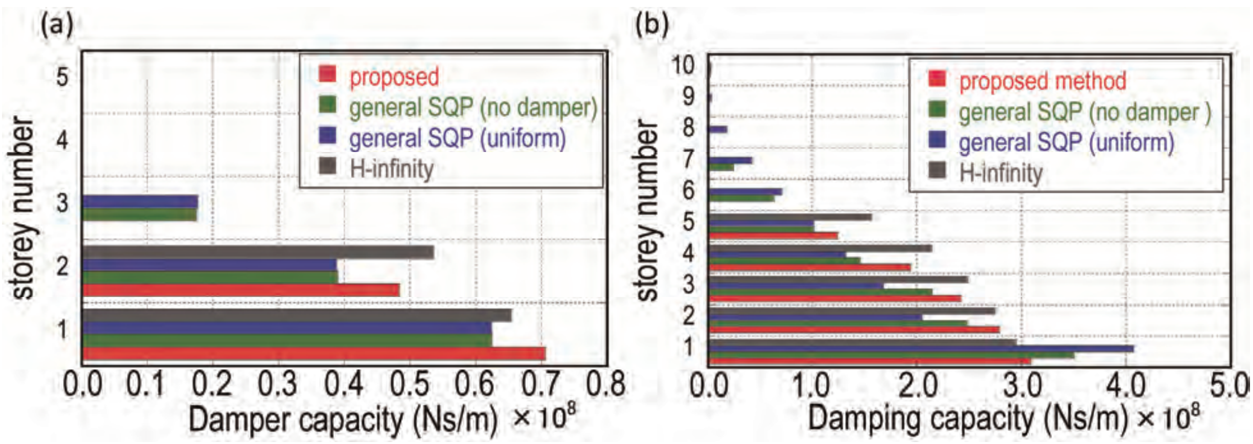


図 5-6 最適ダンパー配置解の比較（提案手法／逐次 2 次計画法／H$^\infty$最適設計法）
(a) 5 層建物モデル, (b) 10 層建物モデル

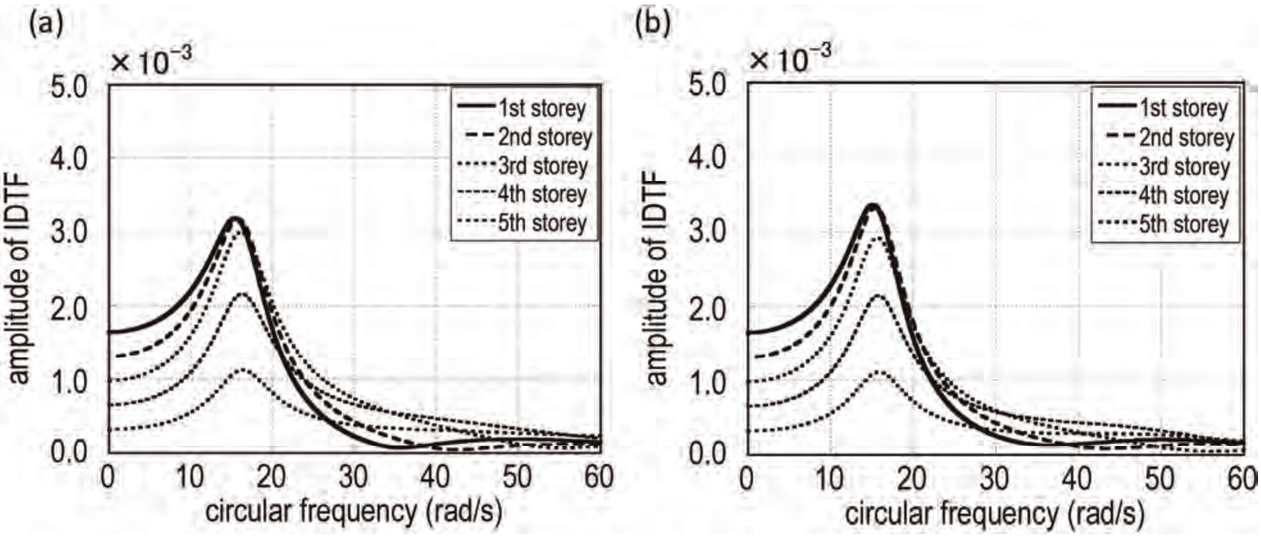


図 5-7 ダンパーを最適に配置した際の層間変位伝達関数の比較(5 層建物モデル)
(a) 提案手法, (b) 逐次 2 次計画法

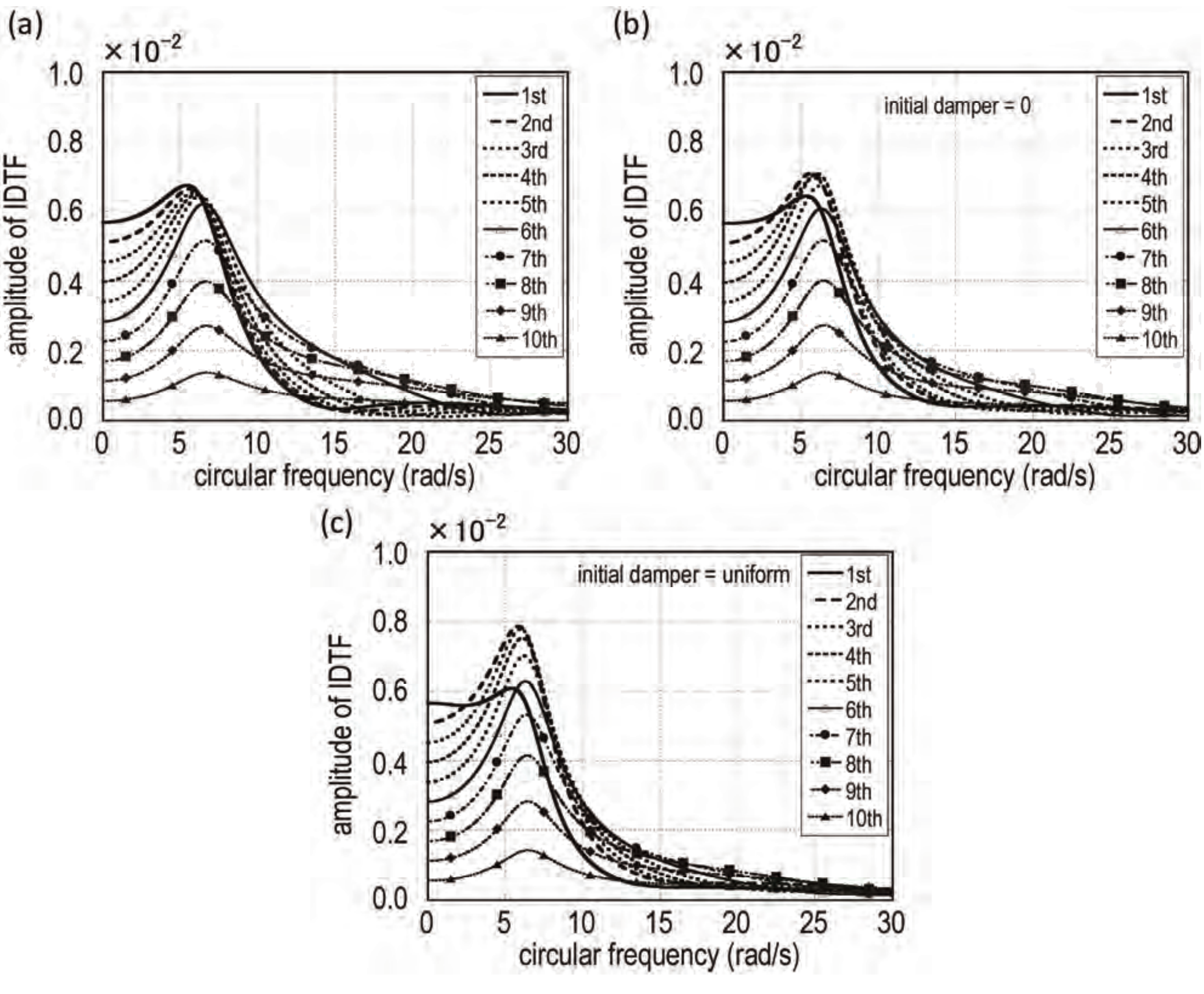


図 5-8 ダンパーを最適に配置した際の層間変位伝達関数の比較(10 層建物モデル)
(a) 提案手法, (b) 逐次 2 次計画法(初期解：ダンパーなし), (c) 逐次 2 次計画法(初期解：均等配置)

図 5-7 および図 5-8 では，指定したダンパー量を最適に配置した際に得られる層間変位伝達関数を 5 層建物モデルならびに 10 層建物モデルの全層にわたって図示したもので, 本章で展開した提案手法により得られた配置解と等価な問題を逐次 2 次計画法で解くことにより得られた配置解のそれぞれに対する層間変位伝達関数を比較した。図より，いずれの場合も提案手法により得られた最適ダンパー配置解に対する層間変位伝達関数の最大振幅が最も効率よく低減されていることが確認できる。また 10 層建物モデルにおいて逐次 2 次計画法を用いた場合では，1 層の層間変位伝達関数の振幅が低減されすぎており，中高層部の伝達関数振幅値を抑制しきれていないことが分かる。すなわち，逐次 2 次計画法では初期解依存性により局所的な最適解に陥り，求められる解が不安定となる場合がある従って，逐次 2 次計画法を用いてグローバル最適解を得るためにはより高度なプログラミングが必要となると考えられる。一方，本提案手法では評価関数である層間変位伝達関数の最大振幅値を低減する最適なダンパー配置解が適切に得られているということが明らかになった。

伝達関数を用いた最適設計問題には様々な成果がある。竹脇は層間変位伝達関数のピーク値の和を評価関数とする最適ダンパー配置問題を展開しており，本章で扱った問題と酷似している。しかしながら，最大層間変形角が規定値を下回るような要請のもとで行われる耐震設計においては，層間変位が最も増大する層位置へ効果的にパッシブダンパーを配置したほうがよいと考えられる。層間変位伝達関数のピーク値の和を評価関数とした場合には，層間変形の平均化の意味では有益であるが，最大層間変形を抑制することが可能かどうかは定かではない。そこで，図 5-9 は，本章で展開した層間変位伝達関数の最大振幅値を評価関数とする最適ダンパー配置問題と，竹脇が展開した従来の方法により得られる配置解と比較したものである。5 層建物モデルでは有意な差は見られないが，10 層建物モデルでは，提案手法のほうが中層部へのダンパー付加が多くなっている結果になっている。両者の最適ダンパー配置問題では評価関数の違いがあるが概ね同様の結果が得られているといえる。

図 5-10 は，本章で展開した伝達関数を用いた最適ダンパー配置法の有効性を示すために，種々の記録地震波に対する時刻歴応答解析を行い，層間変位の最大応答値を各層ごとに図示したものである。建物モデルは 5 層とし, 比較のために, ダンパーの減衰係数の総和は一定とし, ① 1 層のみにダンパーを配置したモデル, ② 全層にダンパーを均等に配置したモデルおよび③ H^{∞}ノルム最適化により得られた最適ダンパー配置を

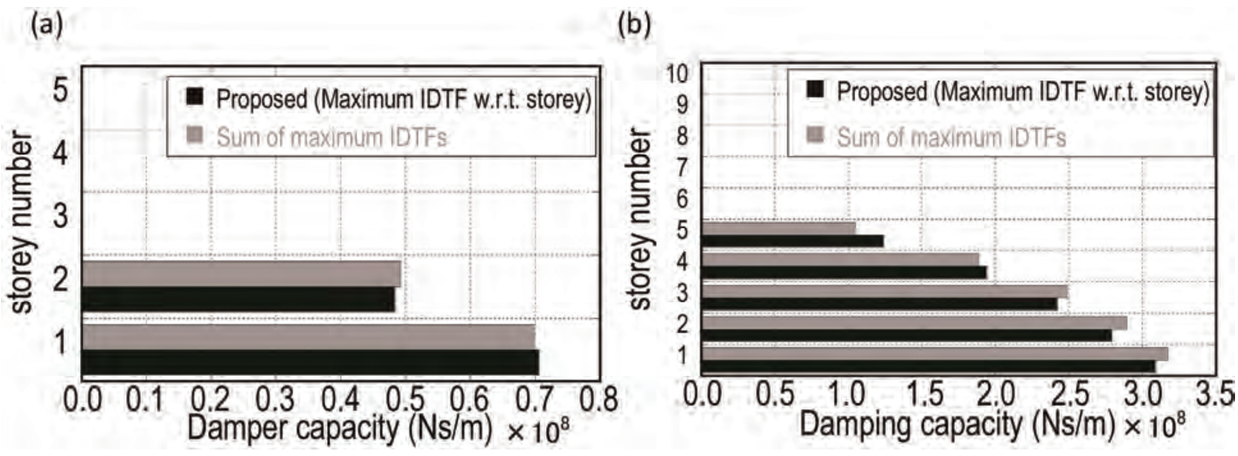


図 5-9 評価関数の違いによる最適ダンパー配置解の比較

（伝達関数最大振幅／伝達関数最大振幅値和）

(a) 5 層建物モデル, (b) 10 層建物モデル

施したモデルも同様に解析を行った。本手法によるダンパー最適配置解と H$^\infty$ノルム最適化による最適配置解には若干の差があったが，図 5-10(a)-(d)を見る限りでは，ほとんど差が見られなかった。一方，1 層のみにダンパーを配置した場合は，1 層の層間変位がかなり低減されるが，中層部で大きな層間変形が生じる。また全層にダンパーを均等に配置した場合も一定の効果は見られるが，本提案手法による最適配置解のほうが低層部での最大層間変位をより低減していることが確認できる。

図 5-11 は，ダンパー未付加時からの応答低減効果の割合(＝ダンパー付加後の最大層間変位／ダンパー未付加時の最大層間変位)を縦軸にとり，種々の記録地震波に対して前述のダンパー配置の違いを比較したものである。ダンパー未付加時に比べて最適ダンパー配置解は全層にわたって効率よく応答を低減していることが分かる。ここでは 4 種の地震動のみについて取り上げたが，図 5-10 および図 5-11 から本章で展開した入力の特性に寄らない伝達関数を用いた最適設計法は，入力の不確定性に対して十分なロバスト性を有しているといえる。

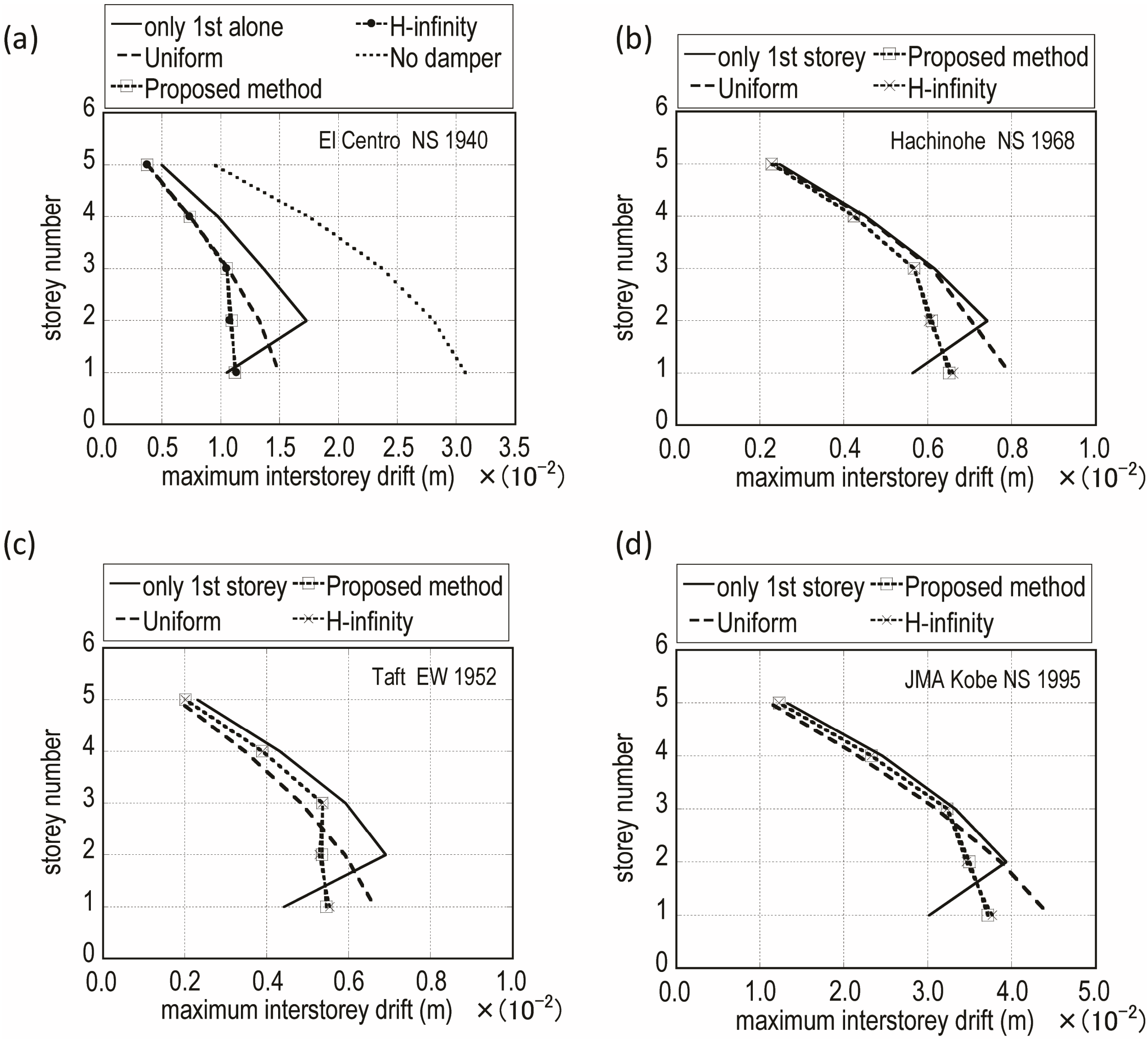


図 5-10 最適ダンパー配置の種々の記録地震波に対する応答低減効果
(a) El Centro NS 1940, (b) Hachinohe NS 1968, (c) Taft EW 1952, (d) JMA Kobe NS 1995

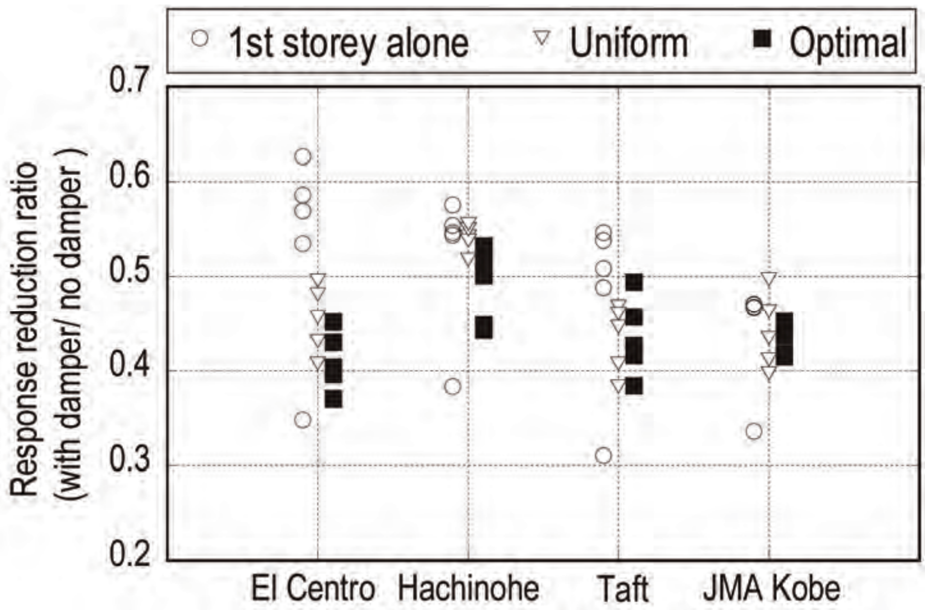


図 5-11 種々の記録地震波に対するダンパー付加による応答低減効果の比較

5.5 結論

本章では入力地震動の特性に依存しない構造物のパラメターのみで記述可能な伝達関数を用いた最適ダンパー配置法を展開した。本章における最適ダンパー配置法の評価関数は層間変位伝達関数の層位置に関する最大値とし，その解法アルゴリズムを示した。本章により得られた結論は下記のとおりである。

1）層間変位伝達関数の最大振幅値最小化を目標とする最適ダンパー配置法の提案

通常の耐震設計においては，最大層間変形角が規定値を下回ることが要求されることが多く，層間変位が最も増大する層位置へパッシブダンパーを配置することが一般的には有効であると考えられる。本章では層間変位伝達関数の振動数および層方向に関する最大値を評価関数とし，これを最小化することを目的とした粘性ダンパーの最適配置問題を提示し，その解法アルゴリズムを展開した。本問題では，評価関数である層間変位伝達関数振幅の最大値を取る層位置が最適化の過程において切り替わる問題となっている点が従来の最適化問題とは異なる点として挙げられる。

2）評価関数が不連続に変化する最適化問題に対する解法

本問題では，層間変位伝達関数振幅が最大となる層位置が変化することに起因して，評価関数を評価する層位置が変化する可能性がある。すなわち，評価関数である層間変位伝達関数が最大振幅となる層位置を逐次選定することに起因して勾配ベクトルが不連続となる特殊な最適化問題となっている。層間変位伝達関数振幅が最大となる層位置が切り替わった場合には，評価関数の設計変数である各層のダンパー配置量に対する 1 次感度（＝勾配ベクトル）を当該層のものに切り替える必要がある。本章では層間変位伝達関数振幅が最大となる層位置における感度解析をあらかじめ行う勾配型の解法アルゴリズムを示し，本手法により最適ダンパー配置解が適切に得られることを数値解析例により示した。

3）種々の最適化問題の解法との比較

本最適化手法を用いた数値解析例では，種々の最適化問題の解法アルゴリズムにより得られる最適解との比較を行っている。比較対象として用いた最適化問題の解法アルゴリズムは，逐次 2 次計画法および H∞ノルム最適化手法（山本ら，2010）である。前者については，同じ問題を扱ったとしても初期値依存性があり，本提案手法により得られる最適ダンパー配置解とは異なる配置解が得られる場合があることを明らかにした。それぞれの手法において実際に得られた最適ダンパー配置解に対する層間変位伝達関数振幅を比較すれば，本提案手法により得られた最適ダンパー配置解は逐次 2 次計画法により得られた配置解に比べてより効率よく最大振幅値を抑制していることを明らかにした。また，H∞ノルム最適化問題は，評価関数が伝達関数マトリクスの特異値の上限値である H∞ノルムであるという点で層間変位伝達関数の最大振幅値とは異なる問題設定であるが，両者の手法により得られる最適配置解に有意な差はなく，ほぼ同等の結果が得られた。H∞制御理論はロバスト安定性に優れた制御理論として確立されており，本提案手法に見られるような伝達関数を用いた最適化手法がパッシブダンパーの最適配置問題においても有効であることを示した。

Appendix： H∞ノルムの定義

ここでは層間変位伝達関数マトリクスにおける H∞ノルムの定義について示す。時間領域におけるせん断質点系モデルの運動方程式は次式で表わされる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{u}(t)=-\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) \qquad \text{(A-5-1)}$$

(A-5-1)式を状態方程式に記述すれば次式を得る。

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}\mathbf{x}+\mathbf{G}f\\ \mathbf{y}=\mathbf{H}\mathbf{x}\end{cases} \qquad \text{(A-5-2)}$$

ここに $\mathbf{y}$ および $\mathbf{H}$ は出力ベクトルならびに出力マトリクスを表し，どのような出力（ここでは層間変位）を扱うかにより異なる定義となる。また，(A-5-2)式において $\mathbf{x}$，f，$\mathbf{F}$ および $\mathbf{G}$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \dot{\mathbf{u}}\end{bmatrix},\ f=\ddot{u}_g,\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\end{bmatrix},\ \mathbf{G}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ -\mathbf{r}\end{bmatrix}. \qquad \text{(A-5-3)}$$

(A-5-2)式で定義されるシステムにおける H∞ノルムは次式で定義される。

$$\|\mathbf{T}\|_\infty=\sup_\omega \sigma_{\max}\left(\mathbf{T}(\mathrm{i}\omega)\right) \qquad \text{(A-5-4)}$$

ここに $\mathbf{T}$ は伝達関数マトリクスであり次式で定義される。

$$\mathbf{T}(s)=\mathbf{H}(s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} \qquad \text{(A-5-5)}$$

また，$\sigma_{\max}(\mathbf{A})$ は，マトリクス $\mathbf{A}$ の最大特異値を表す。

参考文献

Attard T.L. (2007). “Controlling all interstory displacements in highly nonlinear steel buildings using optimal viscous damping”, *J. Struct. Eng., ASCE*, **133**(9), pp1331-1340.

Aydin E., Boduroglub M.H., Guney, D. (2007). “Optimal damper distribution for seismic rehabilitation of planar building structures”, *Eng. Struct.* **29**, pp176–185.

Bai Y., Grigoriadis, K.M., Demetriou, M.A. (2006). “Damping parameter design in structural systems using an analytical H_∞ norm bound approach”, *Proc. of the 45th IEEE conf. on Decision & Control,* San Diego, CA.

Cimellaro G.P. (2007). “Simultaneous stiffness-damping optimization of structures with respect to acceleration, displacement and base shear”, *Eng. Struct.*, **29**, pp2853-2870.

Cimellaro G.P., Retamales R. (2007). “Optimal softening and damping design for buildings”, *Struct. Control Health Monitoring*, **14** (6), pp831-857.

Constantinou M.C., Tadjbakhsh I.G. (1983). “Optimum design of a first story damping system”, *Comput. & Struct.* **17(2)**, pp305-310.

De Silva, C.W. (1981). “An algorithm for the optimal design of passive vibration controllers for flexible systems”, *J. Sound Vib.* **74**(4), pp495-502.

Fujita K., Moustafa A., Takewaki I. (2010). “Optimal placement of viscoelastic dampers and supporting members under variable critical excitations”, *Earthq. & Struct.*, **1**(1), pp43-67.

Fujita K., Yamamoto K., Takewaki I., (2010) "An evolutionary algorithm for optimal damper placement to minimize intestorey-drift transfer function", *Earthquakes and Structures*, Vol.1, No.3, pp289-306.

Garcia D.L. (2001). “A simple method for the design of optimal damper configurations in MDOF structures”, *Earthq. Spectra*, **17**(3), pp387-398.

Garcia D.L, Soong T.T. (2002). “Efficiency of a simple approach to damper allocation in MDOF structures”, *J. Struct. Control*, **9**(1), pp19-30.

Gurgoze M., Muller P.C. (1992). “Optimal positioning of dampers in multi-body systems”, *J. Sound Vib.* **158(3)**, pp517-530.

Hahn G.D., Sathiavageeswaran K.R. (1992). “Effects of added-damper distribution on the seismic response of buildings”, *Comput. & Struct.* **43(5)**, pp941-950.

Kiu W., Tong M., Wu Y., Lee G. (2004). “Optimized damping device configuration design of a steel frame structure based on building performance indices”, *Earthq. Spectra*, **20**(1), pp67-89.

Lavan O., Levy R. (2005). “Optimal design of supplemental viscous dampers for irregular shear-frames in the presence of yielding”, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **34**(8), pp889-907.

Lavan O., Levy R. (2006a). “Optimal design of supplemental viscous dampers for linear framed structures”, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **35**(3), pp337-356.

Lavan O., Levy R. (2006b). “Optimal peripheral drift control of 3D irregular framed structures using supplemental viscous dampers”, *J. Earthq. Eng.*, **10**(6), pp903-923.

Levy R., Lavan O. (2006). “Fully stressed design of passive controllers in framed structures for seismic loadings”, *Struct. Multidisc. Optim.*, **32**(6), pp485-498.

Liu W., Tong M., Wu X., Lee G. (2003). “Object-oriented modeling of structural analysis and design with application to damping device configuration”, *J. Computing in Civil Eng., ASCE*, **17**(2), pp113-122.

Liu W., Tong M., Lee G. (2005). “Optimization methodology for damper configuration based on building performance indices”, *J. Struct. Eng., ASCE*, **131**(11), pp1746-1756.

Marano G..C., Trentadue F., Greco, R. (2007). “Stochastic optimum design criterion for linear damper devices for seismic protection of building”, *Struct. Multidisc. Optim.* **33**, pp441-455.

Silvestri S., Trombetti T. (2007). “Physical and numerical approaches for the optimal insertion of seismic viscous dampers in shear-type structures”, *J. Earthq. Eng.*, **11**(5), pp787-828.

Singh M.P., Moreschi L.M. (2001). “Optimal seismic response control with dampers”, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **30**(4), pp553-572.

Singh M.P., Moreschi L.M. (2002). “Optimal placement of dampers for passive response control”, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **31**(4), pp955-976.

Takewaki I. (1997). “Optimal damper placement for minimum transfer functions”, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **26**(11), pp1113-1124.

Takewaki I. (2000). “Optimal damper placement for planar building frames using transfer functions”, *Struct. Multidisc. Optim.*, **20**(4), pp280-287.

Takewaki I. (2002). “Robust building stiffness design for variable critical excitations”, *J. Struct. Eng., ASCE*, **128**(12), pp1565-1574.

Takewaki I. (2009). *Building control with passive dampers: -Optimal performance-based design for earthquakes-*. John Wiley & Sons (Asia), Singapore.

Takewaki I., Yoshitomi, S. (1998). “Effects of support stiffnesses on optimal damper placement for a planar building frame”, *J. Struct. Des. of Tall Buildings*, **7**(4), pp323-336.

Takewaki I., Yoshitomi, S., Uetani, K., and Tsuji, M. (1999). “Non-monotonic optimal damper placement via steepest direction search”, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, **28**(6), pp655-670.

Tan P., Dyke SJ., Richardson A., Abdullah M. (2005). “Integrated device placement and control design in civil structures using genetic algorithms”, *J. Struct. Eng., ASCE*, **131**(10), pp1489-1496.

Trombetti T., Silvestri S. (2004). “Added viscous dampers in shear-type structures: The effectiveness of mass proportional damping”, *J. Earthq. Eng.*, **8**(2), pp275-313.

Trombetti T., Silvestri S. (2007). “Novel schemes for inserting seismic dampers in shear-type systems based upon the mass proportional component of the Rayleigh damping matrix”, *J. Sound Vib.*, **302**(3), pp486-526.

Tsuji M., Nakamura T. (1996). “Optimum viscous dampers for stiffness design of shear buildings”, *J. Struct. Des. of Tall Buildings*, **5**, pp217-234.

Uetani K., Tsuji M., Takewaki I. (2003). “Application of optimum design method to practical building frames with viscous dampers and hysteretic dampers”, *Eng. Struct.*, **25**(5), pp579-592.

Viola E., Guidi F. (2008). “Influence of the supporting braces on the dynamic control of buildings with added viscous dampers”, *Struct. Control Health Monitoring*, **16**(3), pp267-286.

Wang Y., Dyke S. (2008). “Smart system design for a 3D base-isolated benchmark building”, *Struct. Control*

Health Monitoring, **30**, pp939-957.

Wongprasert N., Symans M.D. (2004). "Application of a genetic algorithm for optimal damper distribution within the nonlinear seismic benchmark building", *J. Eng. Mech., ASCE*, **130**(4), pp401-406.

Yamamoto K., Fujita K., Takewaki I. (2010). "H_∞ Optimization in Damper Placement for Interstorey Drift Control of Structures", *Proc. of Advances in Interaction and Multiscale Mechanics (AIMM'10)*, Jeju, Korea.

Yamamoto K., Fujita K., Takewaki I. (2010). "Optimal damper placement in building structures for H_∞ norm", *J. of Structural and Construction Engineering*, No.658, pp2163-2170 (in Japanese).

第6章　免震建物特性の不確定性を考慮した地震時応答に関するロバスト性評価法

6.1　構造物特性の不確定性を考慮した不確定性解析法の必要性

増大する地震動レベルに対して高層建物や大規模構造物の設計を考える上で，免震技術や制振技術は不可欠なものとなりつつある。免震技術や制振技術を用いて構造物の安全性を高めるには，免震装置や制振装置を含めた構造物全体の特性を適切にモデル化した上で，期待される応答低減効果を高精度に評価する必要がある。地震動の特性や規模，発生時期については不確定性が高いため，構造物の安全性を評価する際には，入力地震動のレベルの設定において十分な注意を払う必要がある。一方，性能の均一性が保証される工業製品とは異なり，建築構造物の部材特性にも少なからずばらつきが存在し，構造物特性の不確定性が構造性能に及ぼす影響についても配慮すべきである。例えば，RC構造のコンクリート弾性係数は，コンクリート強度に大きく依存する。通常は設計基準強度を下回らないように配慮しているため，実際のコンクリート強度には相当なばらつきがあるということが報告されている。また，免震構造に採用される種々の積層ゴムアイソレータやダンパーについては，材料物性のばらつき，製作誤差，温度・振動数依存性等に起因した製品のばらつきや経年による特性変化が顕著であり，設計時にはこれらも含めた構造物パラメターの不確定性が免震性能に及ぼす影響について検討を行う必要があると指摘されている(日本免震構造協会, 2010)。

種々の不確定性を想定した上で構造物のロバスト性(=不確定性に対する頑強さ)を分析した研究には多数のものが存在する。例えば，構造物パラメターの変動領域を楕円で近似する凸モデルが提案されているが，精度上の問題から変動領域に制限がある(Y. Ben-Haim and I. Elishakoff, 1990)。また，寒野と竹脇(2005)は，剛性および外力の不確定性を考慮した上で，ロバスト性の度合いを効率よく評価する方法を示している。東野と和田(2009)は，入力地震動レベルの不確定性を想定し，免震建物に想定を超える地震動が入力された場合に，免震層の滑り支承の摩擦係数や復元力の有無が免震建物のロバスト性に及ぼす可能性について検討を行っている。免震建物に関する不確定性解析として，竹脇(2008)は，超高層免震建物を対象とし，規定された免震性能を満足するために必要となる粘性減衰ダンパー量を決定する逆問題型解法を提示し，免震構造物のロバスト性について検討している。一方，免震建物に対する実務設計においては，いくつかの設計用地震動群に対して免震装置などの特性ばらつきを考慮した応答が設計条件内に収まることを確認する手順がとられている。しかしながら，構造物パラメターのばらつきに対する免震性能のロバスト性を効率的かつ高信頼度で解析する方法は未だ確立されているとは言い難い。

第2章および第3章では極限外乱法というアプローチにより入力地震動における不確定性を考慮することが可能であることを示し, 第4章では入力地震動の不確定性を考慮するために極限外乱法を導入した上で, 制振装置を有する建築構造物の極限外乱に対する最適設計問題の解法アルゴリズムを構築した。しかしながら，設計時には入力外乱の不確定性のみならず構造物特性のばらつき，不確定性についても考慮する必要があり, 構造物特性の不確定性が構造物応答に及ぼす影響についてはいまだ十分に明らかになっていない。このような問題に対して本章では，構造物パラメターの不確定性を考慮した際の構造物応答のばらつきを高精度に評価することが可能な不確定性解析法を提案する。

前述の通り, 免震建物における積層ゴムアイソレータやダンパー特性のばらつきは免震性能に大き

く影響するため，本章では基礎免震を有する免震建物を扱う。免震装置や上部構造の種々のパラメターが不確定性を有することを想定した上で, 免震建物の設計時に検討すべき応答量の一例としての免震層水平変位および頂部絶対加速度応答の最大値の上下限値を予測する不確定性解析法(=ロバスト性解析法)を提示する。本手法を適用することにより，構造物パラメターのばらつきに対する応答のばらつきを高精度に予測することが可能となる（藤田，竹脇 2011)。

6.2 免震建物のモデル化における不確定性の取り扱い

検討対象とする基礎免震を有する N 層免震建物モデルを図 6-1 に示す。後述するロバスト性解析法の有用性を明示することを目的とし，3 つの異なる免震建物モデル A,B,C を扱う。上部構造については，各層を 1 質点と見なす多質点系せん断型弾性モデルとする。アイソレータとして免震建物モデル A では，線形の復元力特性を有する天然ゴム系積層ゴムアイソレータ(NRB)を用いる(6.5 節数値例)。NRB を用いる場合には，免震層の減衰性能を補う目的で種々のダンパーを併用することが一般的である。免震建物モデル A では，免震層にオイルダンパーを適用することとする。一方，免震建物モデル B では非線形の復元力特性を有する鉛プラグ入り積層ゴムアイソレータ(LRB)を用いる(6.6 節数値例)。LRB は，非線形の復元力特性を有し，アイソレータそのものが減衰性能を有しているため，付加ダンパーを要しないという特徴がある。最後に，免震建物モデル C では，NRB および LRB を併用する場合について検討する(6.7 節数値例)。それぞれの免震建物モデルの構造物特性の詳細については，後続の節で説明する。

通常の免震建物の設計においては，積層ゴムアイソレータの特性変動を考慮した上で，免震建物の安全性について検証する必要がある。積層ゴムの不確定性に寄与する主たる原因としては製品上のばらつき，温度・振動数変化によるばらつきおよび経年変化による特性変化が挙げられる。NRB の温度依存性については, 20℃における NRB のせん断弾性係数を基準とすれば, -10℃で 10%程度上昇し，40℃では数%程度低くなるとされている。また天然ゴムは有機物であるため，酸化劣化による経年変

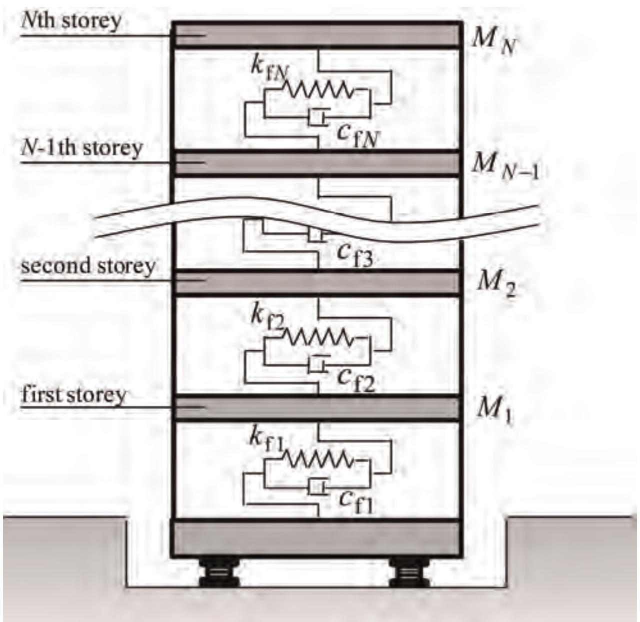


図 6-1 基礎免震を有する免震建物モデル

表 6-1 免震部材の特性値の変動幅

免震部材	復元力特性	状態	特性値の変動要因			変動幅合計
			製造ばらつき	温度依存	経年変化	
鉛プラグ入り積層ゴム	2 次剛性	上限	+10%	+6%	+11%	+27%
		下限	-10%	-5%	0%	-15%
	切片荷重	上限	+10%	+23%	0%	+33%
		下限	-10%	-21%	0%	-31%
天然ゴム系積層ゴム	一次剛性	上限	+10%	+6%	+10%	+26%
		下限	-10%	-5%	0%	-15%
すべり支承	一次剛性	上限	+20%	+5%	+15%	+40%
		下限	-20%	-5%	0%	-25%
	2 次剛性	上限	+50%	+10%	+20%	+80%
		下限	-50%	-10%	-20%	-80%

化を無視することはできない。免震構造が実用化されてから 20 年余りしか経っておらず，信頼性の高いデータは少ない状況ではあるが，NRB の経年変化としては最大で 10%程度の剛性増加が予測されている。表 6-1 では，NRB ならびに主な免震ゴム積層アイソレータにおける不確定性の要因と法規上で定められている設計時に留意すべき変動率について記す(日本免震構造協会, 2010)。表 6-1 において, 一般的に積層ゴムは経年変化における酸化によって硬化する影響が生じるため積層ゴムアイソレータの剛性は増大する。従って, 積層ゴムアイソレータでは, 設計値からの変動率が正側と負側（＝設計値からの増減の変動幅）が異なることに留意する必要がある。

6.3 構造物特性の不確定性を考慮した既往の区間解析法

構造物パラメターや入力外乱等の不確定性に対して，構造物の応答や固有振動特性のばらつきを評価する方法，言い換えれば種々の不確定性に対して構造物が有する頑強さ(=ロバスト性)を評価する不確定性解析法には様々な方法が提案されている。なかでも区間解析法は不確定性解析法における有力な方法の一つであり，ばらつきが想定される物性値や設計パラメター等に対してばらつきの変動幅を与え，目的関数 f の上下限値を推定する方法である。区間解析法において，ばらつきが想定される構造物パラメター $\mathbf{X}$ を次のように定義し，これをインタバル変数と称する。

$$\mathbf{X}^I=\left\{\left[X_i^c-\Delta\underline{X}_i,\, X_i^c+\Delta\overline{X}_i\right]\right\}\qquad (i=1,\cdots,N_x) \tag{6-1}$$

ここに$(\ )^I$はインタバル変数を示し，$[a,b]$により当該変数の下限値aおよび上限値bが定義される。また，(6-1)式において，$(\ )^c$，$\Delta\overline{X}$，$\Delta\underline{X}$ およびN_xは，それぞれノミナルモデルにおける構造物パラメターのノミナル値，インタバル変数の上側と下側の変動幅およびインタバル変数の個数を表す。また，目的関数 f をインタバル変数 $\mathbf{X}^I$ を用いて次のように表わすことを一般的にインタバル拡張(Interval extension)という。

$$
\begin{aligned}
f^I(\mathbf{X}) &= f(\mathbf{X}^I) \\
&= f\left([X_1^c - \Delta \underline{X}_1, X_1^c + \Delta \overline{X}_1], \cdots, [X_{Nx}^c - \Delta \underline{X}_{Nx}, X_{Nx}^c + \Delta \overline{X}_{Nx}]\right)
\end{aligned}
\tag{6-2}
$$

(6-2)式は，インタバル変数の端点の組み合せから目的関数 f の上下限値を見出した上で，それらの間の関数値の集合を意味する。

通常の区間解析法では，目的関数 f の各変数に対する単調性を前提としており（Inclusion monotonic と呼ばれる），次の制約を満たすものと仮定している。

$$
\left\{ f(\mathbf{X}) : X_i \in X_i^I, i = 1, 2, \cdots, N_x \right\} \subseteq f(X_1^I, X_2^I, \cdots, X_{N_x}^I) \tag{6-3}
$$

(6-3)式の右辺は，(6-2)式で定義した「目的関数をインタバル拡張したもの」である。(6-3)式は目的関数 f の最大・最小値がインタバル変数の端点で生起されることを意味している。図 6-2(a)および(b)は，インタバル変数が 2 個の場合を例として，目的関数の上下限値を与える不確定パラメターの組み合せにおける目的関数の単調性および非単調性の違いを図示したものである。図 6-2(a)に示すように，目的関数 f が単調性を有している場合(Inclusion monotonic 仮定)には，インタバル変数の端点の組み合せで評価される応答値の中に正解値が必ず含まれる。従って，(6-3)式の前提のもとで通常の区間解析法における厳密解は，各インタバル変数の上限値 $\overline{X}_i = X_i^c + \Delta \overline{X}_i$ と下限値 $\underline{X}_i = X_i^c - \Delta \underline{X}_i$ の組み合せに対して逐次応答解析を実施することにより得られ，全体での応答解析による負荷（＝応答解析の回数）は 2^{N_x} となる。しかしながら，多くの不確定パラメターを想定する場合には，N_x の増大に伴い計算試行回数が膨大となるため，上述のような総当り解法は適切ではない。さらに，図 6-2(b)に示すように，目的関数が非単調性を有している場合には，インタバル変数の端点の組み合せのみで評価を行うことは適切ではない。

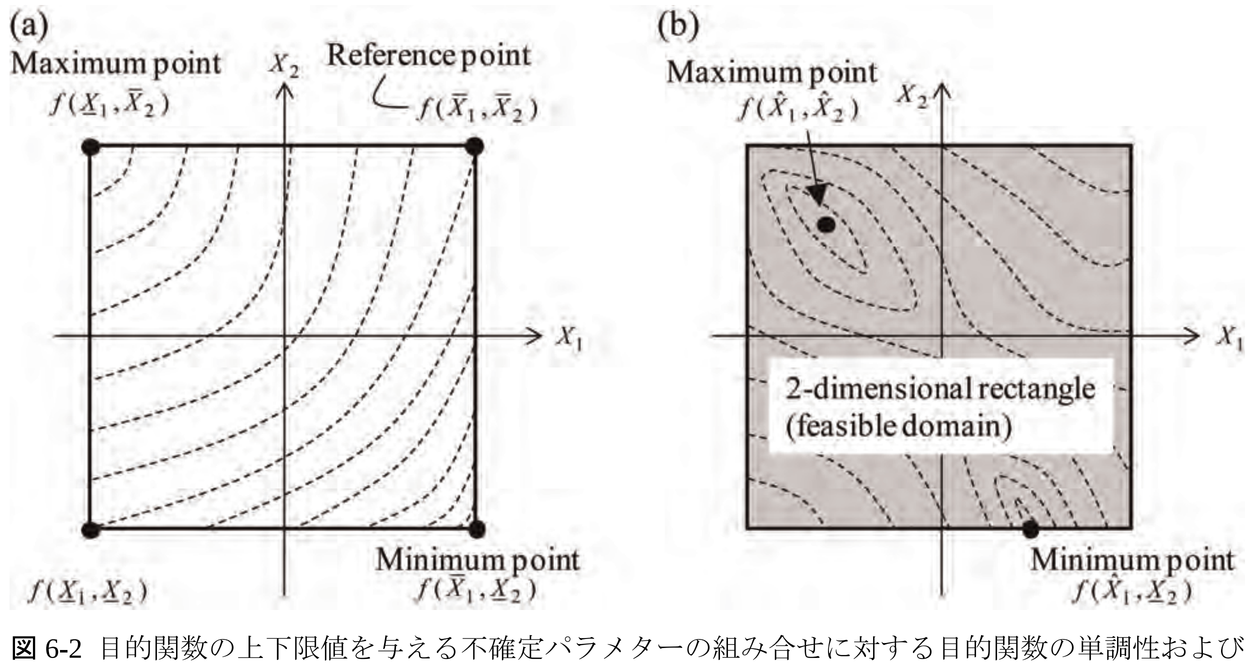


図 6-2 目的関数の上下限値を与える不確定パラメターの組み合せに対する目的関数の単調性および非単調性による違い　(a) Inclusion monotonic, (b) non-monotonic

このような問題を解決する方法として，Z. Qiu and I. Elishakoff(1998)は，有限要素法における静的変位を決定する剛性マトリクスの逆行列をノイマン級数展開により近似する方法を提示している。また，Z. Qiu ら(1998)は，目的関数を収束級数展開により近似する方法を提案し，計算負荷の低減が可能であることを示している。一方，Chen ら(2009)は，目的関数である固有値（固有円振動数の 2 乗）を Taylor 展開の 1 次微係数および 2 次微係数の対角成分を用いて近似することにより，計算試行回数を大幅に低減した上でインタバル変数の端点における目的関数の上下限値を評価する方法を提示している。一方，目的関数の非単調性を考慮する場合は，逐次 2 次計画法や応答曲面法等を適用し，最適化問題に帰着させて解を求める必要がある。しかしながら，最適化問題として目的関数の上下限値を評価することは容易ではないため，上述のような方法が必ずしも有効であるとは限らない。

6.4　Taylor 展開に基づく上下限値探索による区間解析法

通常の区間解析法では，構造物パラメターの変動に対して目的関数の単調性が仮定される。しかしながら，対象とする目的関数の選定や外乱の特性に依存して目的関数が非単調性を有する場合も想定され，不確定性を想定する構造物パラメターの上下限値で目的関数が最大化もしくは最小化されるとは限らない。

構造物パラメターの不確定性を制約したもとで目的関数の上下限値を評価する問題は，一般的に次のように記述される。

$$\begin{array}{ll} \text{Find} & \mathbf{X} \\ \text{So as to maximize / minimize} & f(\mathbf{X}) \\ \text{Subject to} & \mathbf{X} \in \mathbf{X}^I \left(\mathbf{X}\right) = f(\mathbf{X}^I) \end{array} \tag{6-4}$$

(6-4)式は一種の制約付き最適化問題となっており，種々の方法で解くことが可能である。しかしながら，(6-4)式で表わされる最適化問題を解く際に，インタバル変数が多く存在することで制約条件の個数も比例的に増大するため解析コスト面で不利である。また，種々の最適化アルゴリズムにより得られる解の収束性に関する個別の検討の必要性等が発生することがあり，構造設計において不確定パラメターに対するロバスト性を評価する方法として用いることは実用的とは言い難い。

そこで本節では，Chen ら(2009)が提示した Taylor 展開による 1 次および 2 次近似を用いた区間解析法の概要について 6.4.1，6.4.2 節で示した上で，従来の区間解析法では想定し得なかった目的関数の非単調性を考慮可能な新しい区間解析法を提示する。

6.4.1　Taylor 展開による 1 次近似を用いた区間解析法

Taylor 展開による 1 次近似を用いて目的関数 f の上下限値を評価する場合，目的関数の上下限値 $\overline{f}$，$\underline{f}$ は次のように求められる。

$$\overline{f} = f\left(\mathbf{X}^c\right) + \sum_{i=1}^{N_x} \left| f_{,X_i} \Delta X_i \right|, \quad \underline{f} = f\left(\mathbf{X}^c\right) - \sum_{i=1}^{N_x} \left| f_{,X_i} \Delta X_i \right| \tag{6-5a,b}$$

ここに $(\ )_{,X_i}$ は，ノミナルモデルにおける目的関数 $\underline{f}$ の構造物パラメター X_i に対する 1 次感度 $\partial f\left(\mathbf{X}\right)/\partial X_i\big|_{X_i = X_i^c}$ を表す。本論文では目的関数 $\underline{f}$ を時刻歴応答解析により得られる最大応答値とするため，1 次感度 $f_{,X_i}$ は数値感度解析を用いて次式により評価する。

$$f_{,X_i} = \{ f(X_i^c + dX_i) - f(X_i^c) \} / dX_i \quad (i = 1, \cdots, N_x) \tag{6-6}$$

(6-6)式では，各インタバル変数についてノミナル値 X_i^c まわりで微小増分 dX_i を与えた上で応答解析を再度行う必要があるため, Taylor展開による1次近似を用いる場合の応答解析の負荷は N_x である。

6.4.2 Taylor 展開による 2 次近似を用いた区間解析法

Taylor 展開による 1 次近似を用いる方法は，応答解析の負荷を大幅に抑えることが可能である。しかしながら，Taylor 展開による 1 次近似は，不確定性の度合いが大きい場合には正解値に対する誤差が大きくなる傾向にあり，一般には目的関数の上下限値幅を過大に評価するため信頼性に乏しい。一方，Taylor 展開による 2 次近似を用いて目的関数を近似することによりロバスト性評価の精度の向上が期待される。Taylor 展開による 2 次近似で表わされる目的関数 f^* は次のように定義される。

$$\begin{aligned} f^*(\mathbf{X}) = f\left(\mathbf{X}^c\right) + \sum_{i=1}^{N_x} f_{,X_i} \left(X_i - X_i^c\right) \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_x} f_{,X_i X_j} \left(X_i - X_i^c\right)\left(X_j - X_j^c\right) \end{aligned} \tag{6-7}$$

ここに $(\ )_{,X_i X_j}$ は，目的関数 $\underline{f}$ の構造物パラメーター X_i および X_j に対する 2 次感度 $\partial^2 f(\mathbf{X}) / \partial X_i \partial X_j \Big|_{X_i = X_i^c, X_j = X_j^c}$ を表す。数値感度解析により 2 次微係数（Hessian 行列）を評価する場合には次式を用いる。

$$f_{,X_i X_j} = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} f(X_i^c + dX_i, X_j^c + dX_j) - f(X_i^c, X_j^c + dX_j) \\ - f(X_i^c + dX_i, X_j^c) + f(X_i^c, X_j^c) \end{array} \right\} / dX_i dX_j & (i \neq j) \\ \{ \hat{f}(X_i^c + 2dX_i) - 2\hat{f}(X_i^c + dX_i) + \hat{f}(X_i^c) \} / dX_i^{\ 2} & (i = j) \end{cases} \tag{6-8}$$

ここに $\hat{f}(X_i)$ は，目的関数 $\underline{f}$ をインタバル変数 X_i のみの関数とみなしたものであり， X_i 以外のインタバル変数は全てノミナル値としている。(6-8)式における応答解析の負荷は，対角成分については $2N_x$ であり，非対角成分は $3(N_x^{\ 2} - N_x)/2$ である。従って，Hessian 行列を数値感度解析により評価する場合では，勾配ベクトルを評価する場合に比べて応答解析の負荷が大幅に増大する。また，(6-7)式で表わされる Taylor 展開による 2 次近似された目的関数の上下限値を推定するためには，(6-7)式の第 3 項において異なるインタバル変数同士の積，即ちクロス項が存在することに起因してインタバル変数の端点の組み合せの違いが目的関数の変動に及ぼす影響を別途考慮する必要がある。

そこで，(6-7)式においてインタバル変数のクロス項を無視し，Hessian 行列の対角成分のみを用いて目的関数を近似する方法が考えられる。この場合の目的関数は次式で表わされる。

$$f^{**}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}^c) + \sum_{i=1}^{N_x} \left\{ f_{,X_i} (X_i - X_i^c) + \frac{1}{2} f_{,X_i X_i} (X_i - X_i^c)^2 \right\} \tag{6-9}$$

(6-9)式では，各インタバル変数 X_i による目的関数の変動項が独立している。例えばインタバル変数 X_1 に対する目的関数の変動量 Δf_1 は次のように表わされる。

$$\Delta f_1\left(X_1, X_2^c, \cdots, X_{N_x}^c\right) = f_{,X_1}\left(X_1 - X_1^c\right) + \frac{1}{2} f_{,X_1 X_1}\left(X_1 - X_1^c\right)^2 \tag{6-10}$$

(6-9)式で表わされる目的関数の上下限値を求めるには，$\Delta f_i \quad (i = 1, \cdots, N_x)$ の最大値および最小値を各インタバル変数 X_i について逐次評価した上でそれらを加えればよい。例えば，Δf_1 の上下限値は(6-10)式をインタバル拡張することにより求められ，次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
&\Delta f_1^I\left(X_1^I, X_2^c, \cdots, X_{N_x}^c\right) \\
&= \begin{bmatrix} \min\left[\Delta f_1\left(\overline{X}_1, X_2^c, \cdots, X_{N_x}^c\right), \Delta f_1\left(\underline{X}_1, X_2^c, \cdots, X_{N_x}^c\right)\right], \\ \max\left[\Delta f_1\left(\overline{X}_1, X_2^c, \cdots, X_{N_x}^c\right), \Delta f_1\left(\underline{X}_1, X_2^c, \cdots, X_{N_x}^c\right)\right] \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6-11}$$

(6-11)式より，インタバル変数 X_1 の上下限値 $\overline{X}_1$，$\underline{X}_1$ に対する Δf_1 を 2 回算定すれば，Δf_1 の上下限値が定まる。

6.4.3 評価関数の非単調性を考慮した新しい区間解析法

前節に示した従来の区間解析法では，目的関数を Taylor 展開による近似で評価するため，不確定性の度合いが大きい場合や目的関数そのものが非単調性を有する場合には得られる結果に相当な誤差が含まれる可能性がある。本節では，従来の区間解析法を拡張し，目的関数の非単調性を考慮することが可能な区間解析法を提示する。

目的関数 $\underline{f}$ を最大化（もしくは最小化）する構造物パラメターの分布を推定することができれば，時刻歴応答解析による再解析を実施することで構造物の応答に関するロバスト性を高精度に評価することが可能となる。ここでは非対角項を無視した 2 次までの Taylor 展開により近似された目的関数 $\underline{f}$ を用いて，その極値を与える構造物パラメターを見出すことを考える。

(6-10)式のように表わされるインタバル変数 X_i $(i = 1, \cdots, N_x)$ に対する目的関数の変動項 $\Delta f(X_i)$ において，$X_i - X_i^c$ を未知変数 $\left\{dX_i : \left|dX_i\right| \in \Delta\overline{X}_i\right\}$ と見なせば，$\Delta f(X_i)$ は次のように書き換えることができる。ただし，次式で表わされる $\Delta f_i\left(dX_i\right)$ は，$dX_i \equiv X_i - X_i^c$ と座標変換を行っているため(6-10)式で定義した関数形とは異なるが，簡単のためここでは同じ関数形を用いる。

$$\Delta f_i\left(dX_i\right) = \frac{1}{2} f_{,X_i X_i}\left(dX_i + f_{,X_i} / f_{,X_i X_i}\right)^2 - f_{,X_i}{}^2 / 2 f_{,X_i X_i} \tag{6-12}$$

ここで $\Delta f_i(dX_i)$ は dX_i に関する 2 次曲線となっており，Δf が最大もしくは最小となる場合の dX_i を陽に導くことが可能である。例えば，$f_{,X_i X_i} < 0$ の場合では，Δf_i の最大値を与えるインタバル変数 $\hat{X}_i$ は次のように求められる。ただし，簡単のため $\Delta\overline{X}_i = \Delta\underline{X}_i = \Delta X_i$ とする。

$$\hat{X}_i = \begin{cases} X_i^c - f_{,X_i} / f_{,X_i X_i} & \left(\left|f_{,X_i} / f_{,X_i X_i}\right| \le \Delta X_i\right) \\ X_i^c + \Delta X_i & \left(-f_{,X_i} / f_{,X_i X_i} \ge 0, \left|f_{,X_i} / f_{,X_i X_i}\right| > \Delta X_i\right) \\ X_i^c - \Delta X_i & \left(-f_{,X_i} / f_{,X_i X_i} < 0, \left|f_{,X_i} / f_{,X_i X_i}\right| > \Delta X_i\right) \end{cases} \tag{6-13}$$

(6-13)式より，dX_i を決定するためには勾配ベクトル $f_{,X_i}$ および Hessian 行列(但し対角成分のみ)

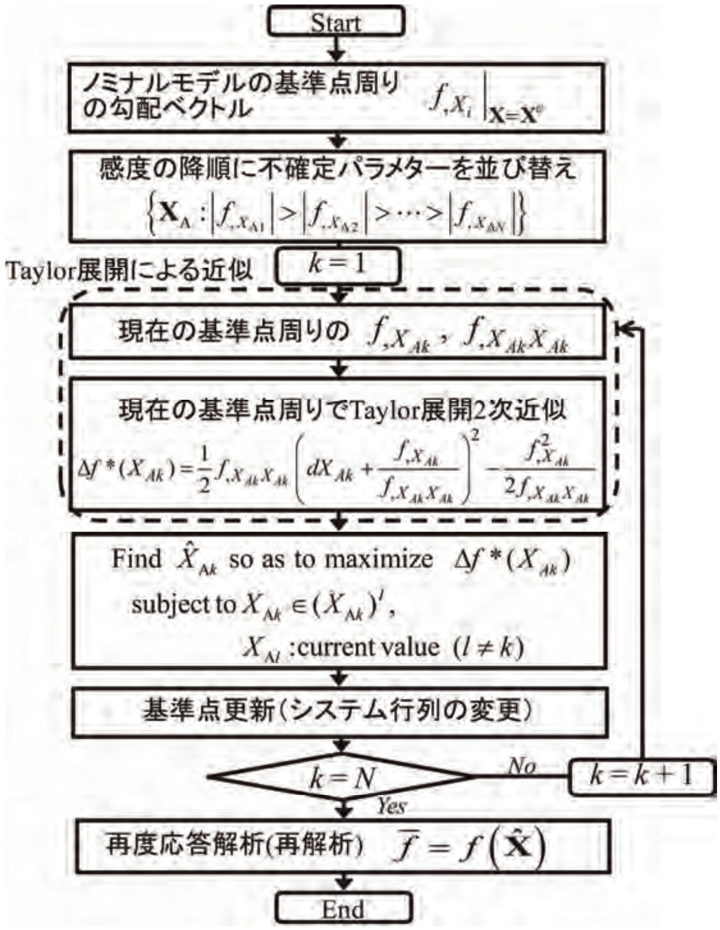


図 6-3 URP 法のフローチャート

$f_{,X_iX_i}$ が必要である。 $f_{,X_i}$ および $f_{,X_iX_i}$ を評価する方法としては，ノミナルモデル（基準点）を固定し基準点周りで算定する方法が考えられる。しかしながら，上述の方法で評価される $f_{,X_i}$ および $f_{,X_iX_i}$ は，対象とするインタバル変数以外の不確定パラメターがノミナル値であるためインタバル変数の相互関係を考慮することが困難である。

ここでは，各次の感度を評価する基準点を随時更新する方法(=Updated Reference Point 法)を提示する。目的関数の上限値を評価する URP 法のフローチャートを図 6-3 に示し，各ステップにおける詳細を下記に記述する。

Step1 目的関数 f のノミナルモデル（基準点）周りの勾配ベクトル $f_{,X_i}\left(i=1,\cdots,N_x\right)$ を算定する。

Step2 勾配ベクトルの絶対値 $\left|f_{,X_i}\right|\left(i=1,\cdots,N_x\right)$ を降順に並び替える。対応するインタバル変数を $\mathbf{X}_\mathrm{A}=\{X_{\mathrm{A1}},\cdots,X_{\mathrm{AN}_x}\}$ とする*。

（＊この操作により目的関数 $\underline{f}$ の変動に大きな影響を及ぼす構造物パラメター $\mathbf{X}$ を明らかにすることが可能となる。）

Step3 X_{A_k} に対する 2 次感度 $f_{,X_{Ak}X_{Ak}}$ (=スカラー量)を算定する。$k=1$ の場合には評価点はノミナルモデルにおける基準点であり，$k\geq 2$ の場合には評価点を更新しているため X_{A_k} に対する 1 次感度 $f_{,X_{Ak}}$ も再評価する。

Step4 Taylor 展開による 2 次近似で表わされる目的関数 f^{**} の変動項 $\Delta f_k\left(X_{A_k}\right)$ を最大化する $\hat{X}_{A_k}$ を導く。

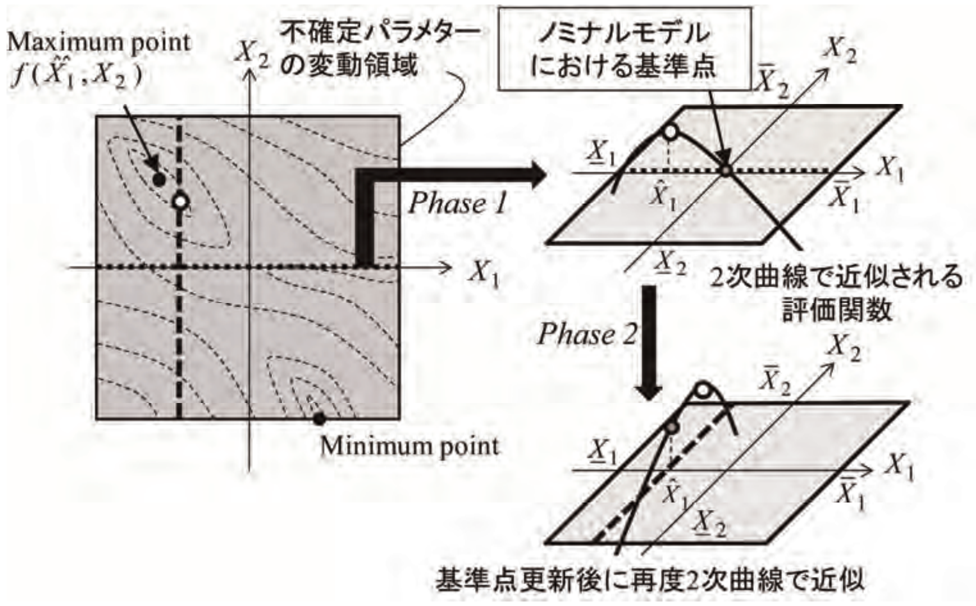


図 6-4 目的関数の近似上限値に評価点を更新する URP 法の概略図

Step5　インタバル変数 X_{A_k} を現状の値から $\hat{X}_{A_k}$ に変更し，評価点を更新する。変更した構造物パラメターに対応するシステム行列(例えば $\mathbf{C}$ や $\mathbf{K}$)を更新する。

Step6　$k = k+1$ とし，$k = N_x$ まで Step3 から Step6 を繰り返す。

Step7　全てのインタバル変数を更新後に時刻歴応答解析による再解析を実施し，目的関数の上限値を評価する。

不確定パラメターのばらつきに対する目的関数の下限値を評価する場合は，Step4 で $\Delta f_k\left(X_{A_k}\right)$ を最小化する $\hat{X}_{A_k}$ を算定し，評価点を更新する。URP 法においては，目的関数の上限値と下限値に対応する評価点の遷移はそれぞれ独立したものであり, 対象とする評価点を逐次更新した上で各次の感度を計算する必要があるため，6.4.2 節で示した方法に比べて応答解析の負荷が約 3 倍程度大きくなる。図 6-4 では，インタバル変数が 2 つの場合について，URP 法の概略を図示する。

6.5　弾性応答に対する URP 法の精度検証

本節では，6.2 節で示した天然ゴム系積層ゴムアイソレータ(NRB)およびオイルダンパーで構成される免震層を有する免震建物モデルに対して URP 法を適用し，免震建物における構造物パラメターがばらついた際の免震性能のばらつきを評価する。NRB およびオイルダンパーはともに線形の復元力特性を有するため，線形の時刻歴応答解析により地震時応答を評価することが可能である。本節では，本提案手法(URP 法)の有効性を示すために，種々の方法(Taylor 展開による 1 次近似，2 次近似，正解値)と比較する。正解値としては，(6-4)式で表わされる問題を制約付き最適化問題とし，逐次 2 次計画法 (=SQP 法) を適用した結果を採用する。SQP 法を用いる際の初期値としては，ノミナルモデルで用いる構造物パラメターを与える。SQP 法は，評価点周りの勾配ベクトルに基づいて探索方向を決定するため，初期値に依存して局所最適解に陥ることも考えられるが，本節における数値例に関しては初期値依存性による正解値の変動は小さいことを確認している。

表 6-2　免震建物の諸元

	上部構造物	免震層
質量[t]	1024	3072
剛性[N/m]	(6-16)式	5.81×10^7
減衰係数 [Ns/m]	剛性比例型: 1 次減衰定数 0.02	1.48×10^7

6.5.1 天然ゴム系積層ゴムアイソレータ(NRB)を有する免震建物モデルの特性

表 6-2 に 20 層（N=20）上部構造物および免震層の諸元を示す。上部構造物の 1 層あたりの質量は 1024 [t]とし，免震層の質量は上部構造 1 層の質量の 3 倍に相当する 3072[t]とする。このとき上部構造物の単位床質量を 1.0 [t/m^2]とすれば平面プランは，32 [m]×32 [m]に相当する。上部構造物質量は全層で一様（=m）とする。上部構造物の層剛性 $\mathbf{k}_\mathrm{f}$ は，免震層固定時の 1 次モードが直線形で与えられると仮定し，次式で求める。

$$k_{\mathrm{f}_i}=\frac{1}{2}\left\{N\left(N+1\right)-i\left(i-1\right)\right\}m\omega_1{}^2\quad\left(i=1,\cdots,N\right)\tag{6-16}$$

ω_1 は，免震層固定時の上部構造物の 1 次固有円振動数であり，ここでは 3.93 [rad/s](=1 次固有周期が 1.60s)とする。尚，上部構造物は，弾性範囲で挙動するものとする。

免震層の層剛性は上部構造物を剛体とみなし，免震層を含めた建物全体の総質量 W_E を 1 質点とみなす振動系において 1 次固有円振動数 ω_0 が 1.57 [rad/s](=1 次固有周期が 4.00s)となるように設定する。従って，免震層に要求される水平剛性 k_0 は次式となる。

$$k_0=\omega_0^2 W_E\tag{6-17}$$

この時，免震層および上部構造物で構成される全体系の 1 次固有円振動数は，1.50[rad/s](=1 次固有周期が 4.19s)となる。

免震構造のアイソレータの選定にあたっては，アイソレータの径およびゴム厚さ，ゴムのせん断弾性係数等を定める必要がある。設計時に留意すべき次項としては，1) 長期面圧が許容値以下であること，2) 十分な免震性能(変形能力および 1 次固有周期)を有していること，が挙げられる。本数値解析例においては，(6-17)式により免震層の層剛性を指定しているため，長期面圧に関する制約を満足するアイソレータを適切に選定する必要がある。アイソレータとして天然ゴム系積層ゴムを用いる場合では，免震層の層剛性は次式で与えられる。

$$k_0=A_R G/T_R\tag{6-18}$$

ここに A_R，G および T_R は，アイソレータの総断面積，ゴムのせん断弾性係数および積層ゴムの総厚である。(6-17)式および(6-18)式が等価であるとすれば，長期面圧 σ_R は次式で求められる。

$$\sigma_R=gGT_R/\omega_0^2\tag{6-19}$$

ここに g は重力加速度を表す。(6-19)式において $T_R=0.2[\mathrm{m}]$，　$G=0.39[\mathrm{N/mm^2}]$ とすれば，$\sigma_R=9.74\,[\mathrm{N/mm^2}]$ となる。これは一般的な NRB の長期許容圧縮面圧以下である。また，(6-18)式より，指定した免震性能に要求される免震層剛性からアイソレータの総断面積が規定される。本数

値例ではアイソレータの径はϕ1100 とし，これを 28 基設置することに相当する。

免震層のオイルダンパーの減衰係数は，上部構造物を剛体とみなした際の 1 次減衰定数が 0.2 となるように与える。

6.5.2 ばらつきを考慮する不確定パラメター

本節においてばらつきを考慮する不確定パラメター $\mathbf{X}$ は，免震層におけるオイルダンパーの減衰係数 c_0，免震層におけるアイソレータ剛性 k_0，上部構造物の構造減衰係数 $\mathbf{c}_\mathrm{f}$ および上部構造物の層剛性 $\mathbf{k}_\mathrm{f}$ とし，インタバル変数 $\mathbf{X}^I$ を次のように表わす。

$$\mathbf{X}^I = \left\{ c_0^I, k_0^I, \mathbf{c}_\mathrm{f}^I, \mathbf{k}_\mathrm{f}^I \right\} \tag{6-14}$$

上部構造物の剛性（および減衰）については，数層にわたり同様のばらつきを与える（いわゆるグルーピング)ことが適当となる場合も考えられるが，本手法ではそのような場合についても同様に扱うことが可能である。ここでは，各層の特性値がそれぞれ独立にばらつく問題を想定する。インタバル変数の変動の上下限を与える $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ および $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ は，インタバル変数の変動幅をノミナル値で除したもので定義し，次式で表わす。

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \left\{ \frac{\Delta \bar{c}_0}{c_0^c}, \frac{\Delta \bar{k}_0}{k_0^c}, \frac{\Delta \bar{c}_{\mathrm{f}_1}}{c_{\mathrm{f}_1}^c}, \cdots, \frac{\Delta \bar{k}_{\mathrm{f}_1}}{k_{\mathrm{f}_1}^c}, \cdots \right\}, \quad \underline{\boldsymbol{\alpha}} = \left\{ \frac{\Delta \underline{c}_0}{c_0^c}, \frac{\Delta \underline{k}_0}{k_0^c}, \frac{\Delta \underline{c}_{\mathrm{f}_1}}{c_{\mathrm{f}_1}^c}, \cdots, \frac{\Delta \underline{k}_{\mathrm{f}_1}}{k_{\mathrm{f}_1}^c}, \cdots \right\} \tag{6-15a,b}$$

6.5.3 入力地震動

本節における不確定性解析で用いる入力地震波は，地動最大速度が 50kine となるように基準化した代表的な記録地震波 4 波およびレベル 2 相当の模擬地震波とする。各地震波（以後，地震波番号 1～5 で表わす）の特性を表 6-3 に示し，加速度波形を図 6-5 (次頁) に示す。

6.5.4 免震層水平変位応答に関する不確定性解析

本節では，目的関数を免震層最大水平変位とした場合の不確定性解析を行う。(6-15)式のばらつきの度合い $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ および $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ を次のように与える。

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{cases} 0.3 & (i=1) \\ 0.26 & (i=2) \\ 0.1 & (i=3,\cdots,N+2) \\ 0.05 & (i=N+3,\cdots,2N+2) \end{cases}, \quad \underline{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{cases} 0.3 & (i=1) \\ 0.15 & (i=2) \\ 0.1 & (i=3,\cdots,N+2) \\ 0.05 & (i=N+3,\cdots,2N+2) \end{cases} \tag{6-20a,b}$$

(6-20)式において，i は不確定パラメターのインタバル番号を表し，$i=1$ は免震層のオイルダンパーの減衰係数 c_0，$i=2$ は免震層の剛性 k_0 を表す。ここで k_0 は，正側と負側で変動幅を非対称とする。これは，経年変化による積層ゴムの硬化に起因してアイソレータの剛性が増大するためである。また，$i=3,\cdots,N+2$ は上部構造の減衰係数 $\mathbf{c}_\mathrm{f}$，$i=N+3,\cdots,2N+2$ は上部構造の層剛性 $\mathbf{k}_\mathrm{f}$ を表す。

図 6-6 は，各入力地震波に対する免震層水平変位の時刻歴最大応答値のばらつきに関する区間解析を，種々の方法(Taylor 展開による 1 次近似，Taylor 展開による 2 次近似，URP 法，正解値(SQP 法))

表 6-3 最大速度 50kine で基準化した入力地震動の最大加速度の比較

	El Centro NS (1940)	Taft EW (1952)	Hchinohe NS (1968)	Tomakomai EW (2003)	BCJ L2
地動最大加速度[m/s^2]	4.59	5.07	3.32	0.90	2.41
地震波番号	1	2	3	4	5

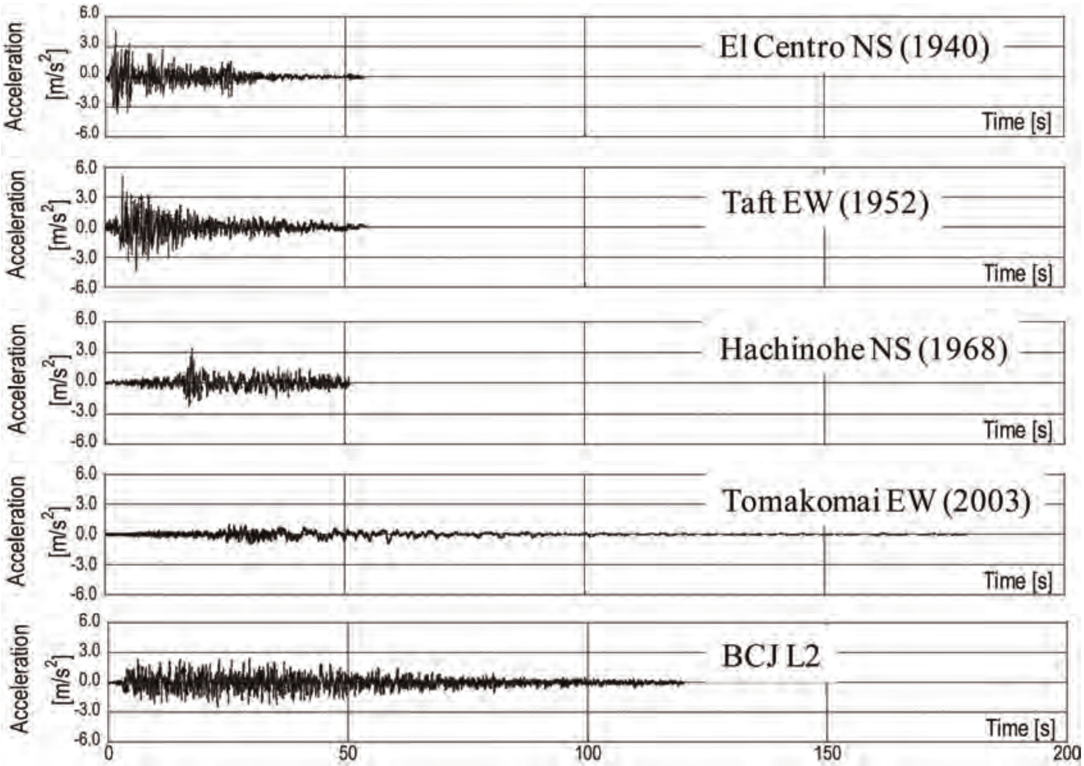


図 6-5 地動最大速度 50kine で基準化した入力地震動の加速度波形

で行った結果を比較したものである。URP 法により得られた結果は，SQP 法を適用して得られた正解値と上下限共に良好に一致しており，URP 法の信頼性・有効性を示している。また，図より地震波番号 4 では，長周期成分が卓越しているためにノミナルモデルにおける応答値(以下ではノミナル応答値)が他の地震波に対して大きい。さらに，構造物パラメターの不確定性を考慮した場合には免震層最大水平変位は，およそ 0.50m になっており（ノミナル応答値からの変動は 1.39 倍），標準的な積層ゴムの許容水平変形を上回る可能性も考えられる。一方，地震波番号 4 以外ではノミナル応答値に大きなばらつきは見られないが, 構造物パラメターの不確定性を考慮した場合の目的関数のばらつきの度合いは地震波により傾向が異なる。これは，構造物パラメターのばらつきに起因する免震建物の動特性の変化による影響が，地震波の周波数特性に依存して異なるためであると考えられる。

URP 法およびその他の区間解析法により得られた結果をそれぞれ比較し，URP 法により得られる目的関数の上下限値に関する精度検証を行う。図 6-7(a),(b)は，それぞれの区間解析法で得られた免震層最大水平変位の上下限値の正解値に対する誤差(＝正解値との差を正解値で除した値)を，対数表記で図示したものである。Taylor 展開による 1 次近似および 2 次近似の方法でも目的関数の上下限値をある程度は予測することが可能であるといえるが，地震波によっては誤差が 10%程度生じるもの

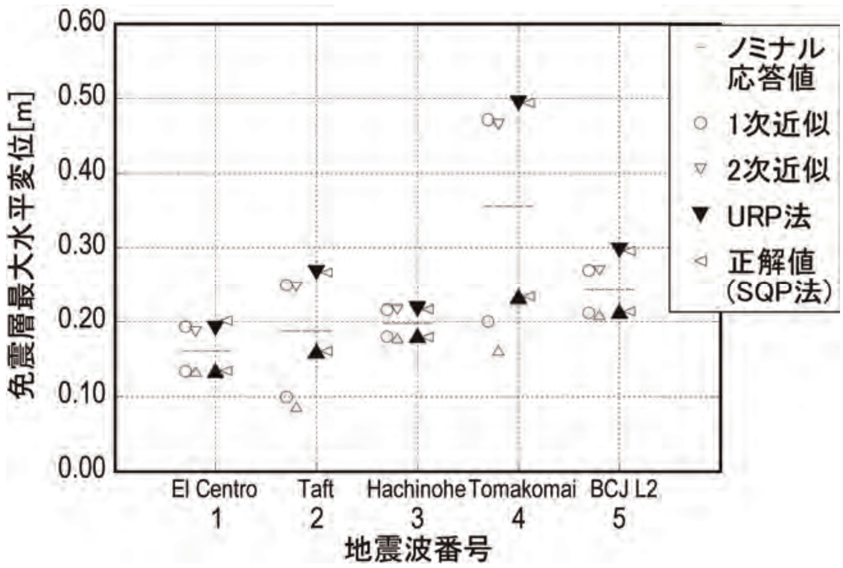


図 6-6 構造物パラメターのばらつきに対する免震層最大水平変位応答の上下限推定値

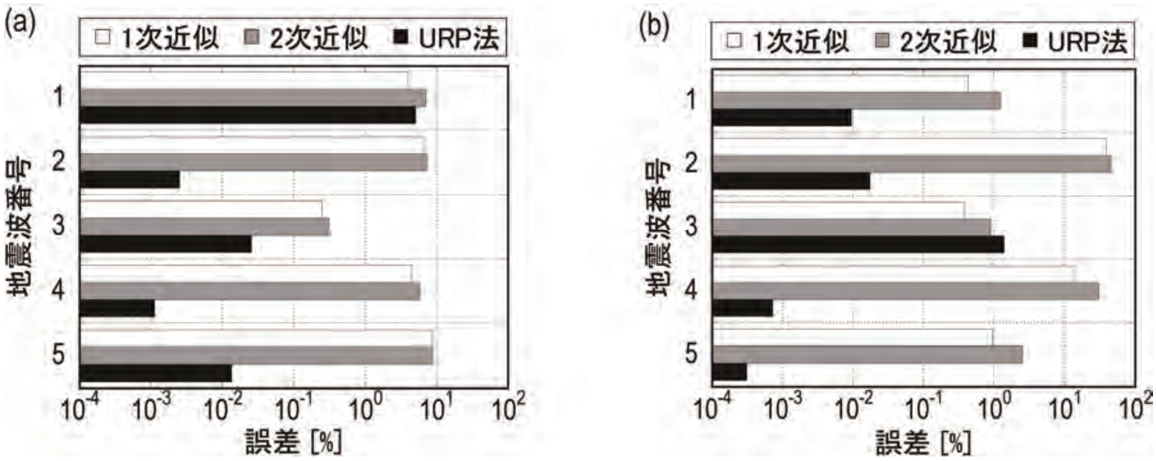


図 6-7 種々の方法による免震層最大水平変位に関する区間解析結果の正解値からの誤差

(a) 上限値の誤差, (b) 下限値の誤差

もあり，信頼性の高い評価が得られているとは言い難い。一方，URP 法により得られた目的関数の上下限値は正解値と良好に一致し，多くの地震波において誤差が 0.1%以下 (最大でも数%の誤差)となっていることが確認できる。

図 6-8 は，Taylor 展開による 2 次近似，URP 法および制約付き最適化問題として正解値とみなした SQP 法により得られた免震層最大水平変位の上限値を与える不確定パラメターの変動分布を示している。横軸は，それぞれのインタバル変数のノミナル値からの変動率を-1 から 1 に割り当てたものである。横軸で-1 となる場合は，インタバル変数 X_i が下限値 $\underline{X}_i$ をとった場合がクリティカルなケースとなることを意味し, 横軸で 0 となる場合は, インタバル変数 X_i がノミナル値であることを表す。また，図 6-8 において縦軸は，(6-14)式で定義したインタバル変数の番号を表す。即ち，インタバル変数番号 1 および 2 が免震層減衰係数および免震層剛性に相当し，インタバル変数番号 3 から 22 までは上部構造物の構造減衰係数，インタバル変数番号 23 から 42 は上部構造物の剛性を表す。

図 6-8(a)では，Taylor 展開による 2 次近似を用いた区間解析法において目的関数の変動は，それぞれのインタバル変数の端点により評価されるため，インタバル変数が中間値をとることはない（必ず

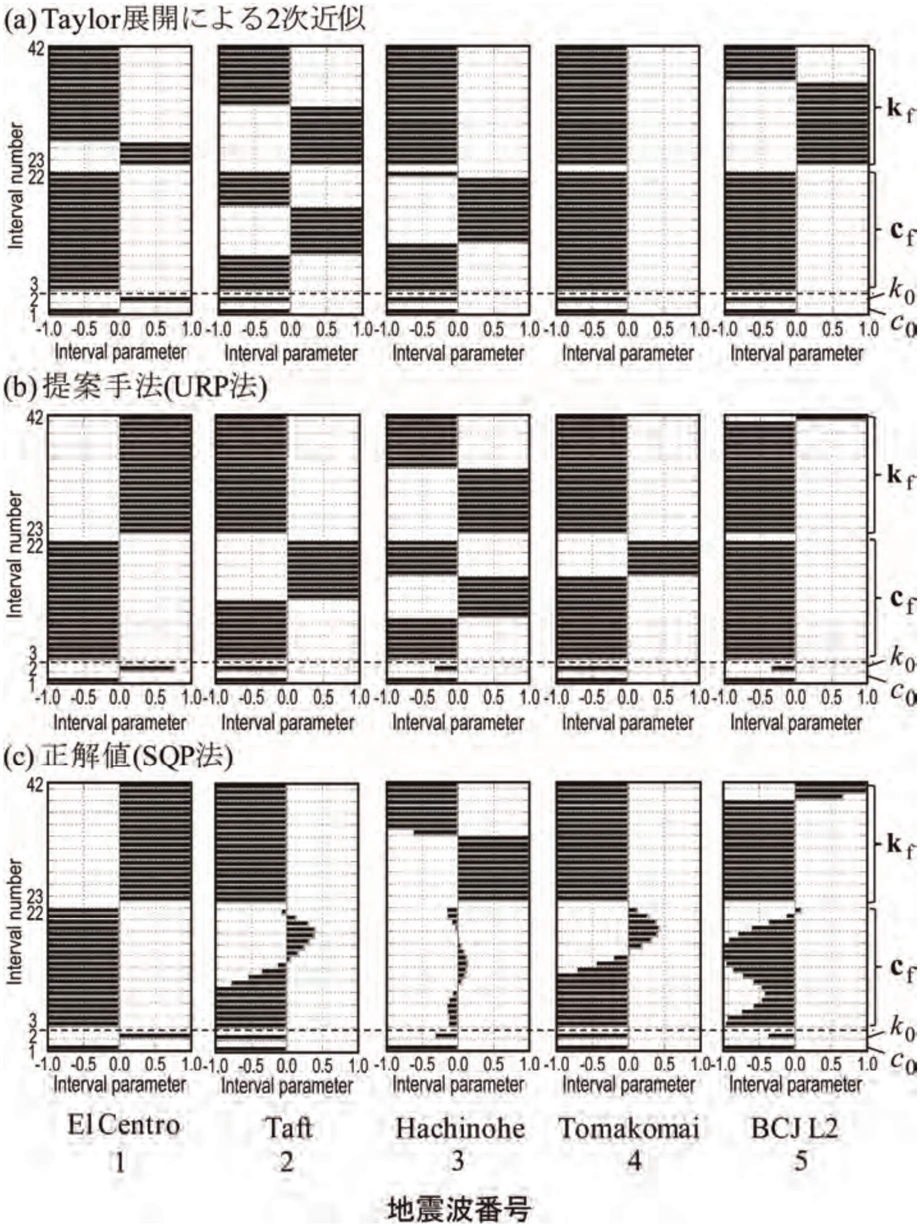


図 6-8 免震層最大水平変位の上限値を与える構造物パラメターの比較
(a) Taylor 展開による 2 次近似，(b) 提案手法, (c) SQP 法

端点の組み合せにおいて解を探索する）。一方，URP 法および SQP 法では，目的関数の非単調性を考慮し，インタバル変数の変動区間内において目的関数を最大化するインタバル変数のクリティカルな組み合せを見出すことが可能である。

図 6-8(b)より，免震層減衰係数 c_0 はいずれの地震波においても下限値をとった場合がクリティカルである。一方，地震波番号 1，3 および 5 では，免震層剛性 k_0 はインタバル変数の領域内に解が存在する。図 6-8(c)の結果と比較すれば，地震波番号 3 および 5 では良好に一致しているといえる。また，図 6-8(c)において上部構造の減衰係数 $\mathbf{c}_\mathrm{f}$ では連続的な変動が見られ，URP 法により得られる結果とは一致していない。しかしながら，免震層最大水平変位に対して上部構造物の構造物パラメターの影響は小さいため(＝感度が低い)，目的関数の上限値を評価する上で大きな問題にはならない。

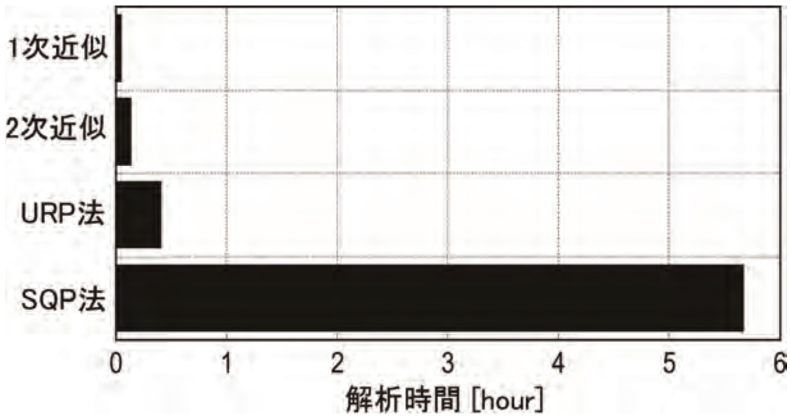


図 6-9 種々の解析法における解析時間の比較

最終的に図 6-8(b)と図 6-8(c)を比較すれば，上部構造物パラメターの分布が一部異なる結果となっているが，免震層減衰係数（インタバル変数番号１）および免震層剛性（番号２）のクリティカルな分布がほぼ一致しているため， URP 法は不確定パラメターに対する目的関数の上限値を高精度に評価することが可能であると考えられ，本提案手法の有効性を示している。

図 6-9 は，各区間解析法および SQP 法による不確定性解析の所要時間を図示したものである(CPU: Core i7 3.57GHz, Memory: 6GB)。SQP 法は初期値依存性があり，誤差許容値の設定に依存して解析時間が大きく変動する。一方，URP 法は，Taylor 展開による 1 次近似および 2 次近似を用いた区間解析法に比べて解析時間において若干不利であるが，比較的短時間で極めて高精度なロバスト性評価が可能であるといえ，本提案手法の有効性を示している。

6.5.5 頂部絶対加速度応答に関する不確定性解析

本節では，目的関数を頂部絶対加速度応答の最大値とした場合の不確定性解析を行う。免震建物のモデルパラメター，ばらつきの度合いおよび入力地震動については前節までの数値例と同様である。図 6-10 は，図 6-6 と同様に各入力地震波に対する頂部絶対加速度応答の最大値の上下限値を種々の区間解析法により評価した結果を比較したものである。

図 6-10 より，地震波番号 2 に対して上限値の変動が最も顕著であり，ばらつきを考慮した際の応答上限値は，ノミナル応答値の 1.42 倍となっている。地震波番号 2 の上限値に関しては，いずれの方法を用いても大きな差異は見られない。しかしながら，Taylor 展開による 1 次近似および 2 次近似を用いた手法では，一部の地震波に対する目的関数の上限値を正解値に対して過小評価している。一方，URP 法では，ほぼすべての地震波に対する目的関数の上下限値が正解値と良好に一致しており，頂部絶対加速度応答の最大値に対しても本手法が有効であるといえる。さらに地震波番号 3 においては，URP 法により得られた応答上限値が SQP 法による結果を上回っている。URP 法では，最終的に評価される応答上限値を時刻歴応答解析の結果に基づき評価するため, 地震波番号 3 においては SQP 法で得られた結果よりクリティカルな不確定パラメターの組み合せが存在すると言える。

図 6-11(a),(b)は，図 6-7 と同様に，各区間解析法で得られた頂部絶対加速度応答の最大値の上下限値の正解値に対する誤差を図示したものである。URP 法により得られる上限値については，地震波番号 3 を除いてほぼ全ての地震波において正解値との誤差が 0.1%程度以下に抑えられており，極め

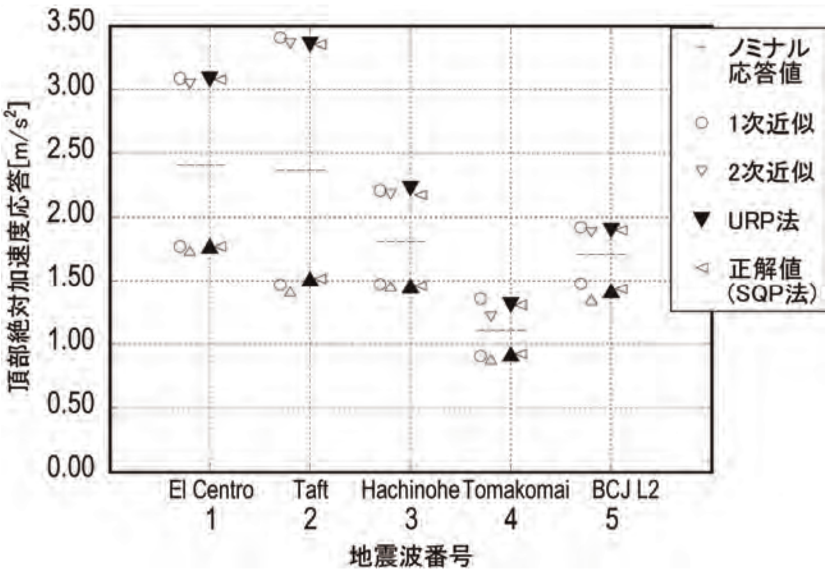


図 6-10 構造物パラメターのばらつきに対する頂部絶対加速度応答の最大値の上下限推定値

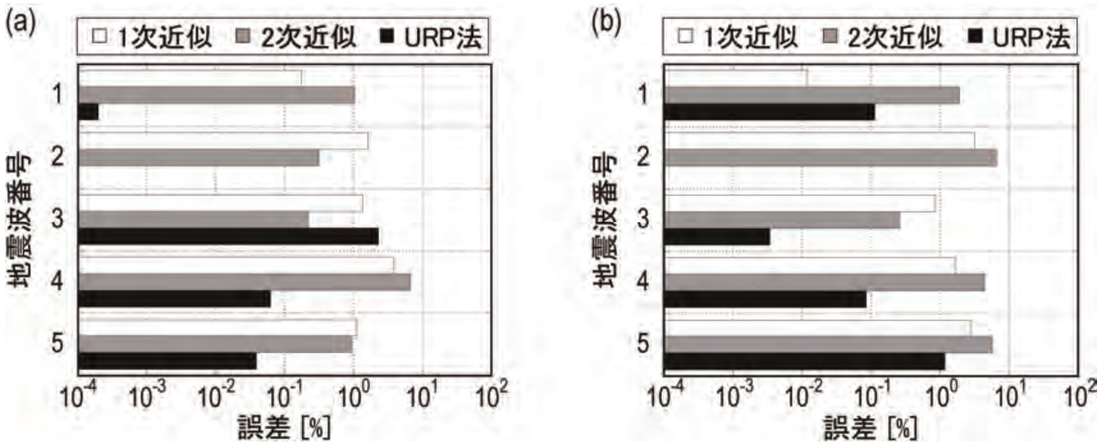


図 6-11 種々の方法による頂部絶対加速度応答に関する区間解析結果の正解値からの誤差
(a)上限値の誤差, (b)下限値の誤差

て高精度な評価が可能であるといえる。尚，前述したように地震波番号 3 に関しては，SQP 法の結果を正解値とみなすことができないため，評価誤差は問題にならない。また，地震波番号 2 においては，Taylor 展開による 2 次近似で表わされた目的関数を最小化する構造物パラメターのクリティカルな組み合せが正解値と厳密に一致した。従って，目的関数の上下限値は，正解値と完全に一致するため誤差は生じなかった。一方，図 6-12(b)の地震波番号 5 では 1%程度の誤差が見られる。これは，地震波番号 5 は模擬波であり，振幅がほぼ定常状態となる時間が比較的長いため，頂部絶対加速度応答の最大値を与える時刻が構造物パラメターの変更に伴って変化し，数値感度の評価が困難となるためであると考えられる。しかしながら，応答の下限値は設計上大きな問題とならないものと考えられる。

図 6-12 は，それぞれの不確定性解析法で得られた目的関数の上限値を与えるインタバル変数の分布を示している。これらを比較すれば，Taylor 展開による 2 次近似を用いた従来の方法に比べ，URP 法で得られた構造物パラメターのクリティカルな分布は，SQP 法の結果と概ね良好に一致している

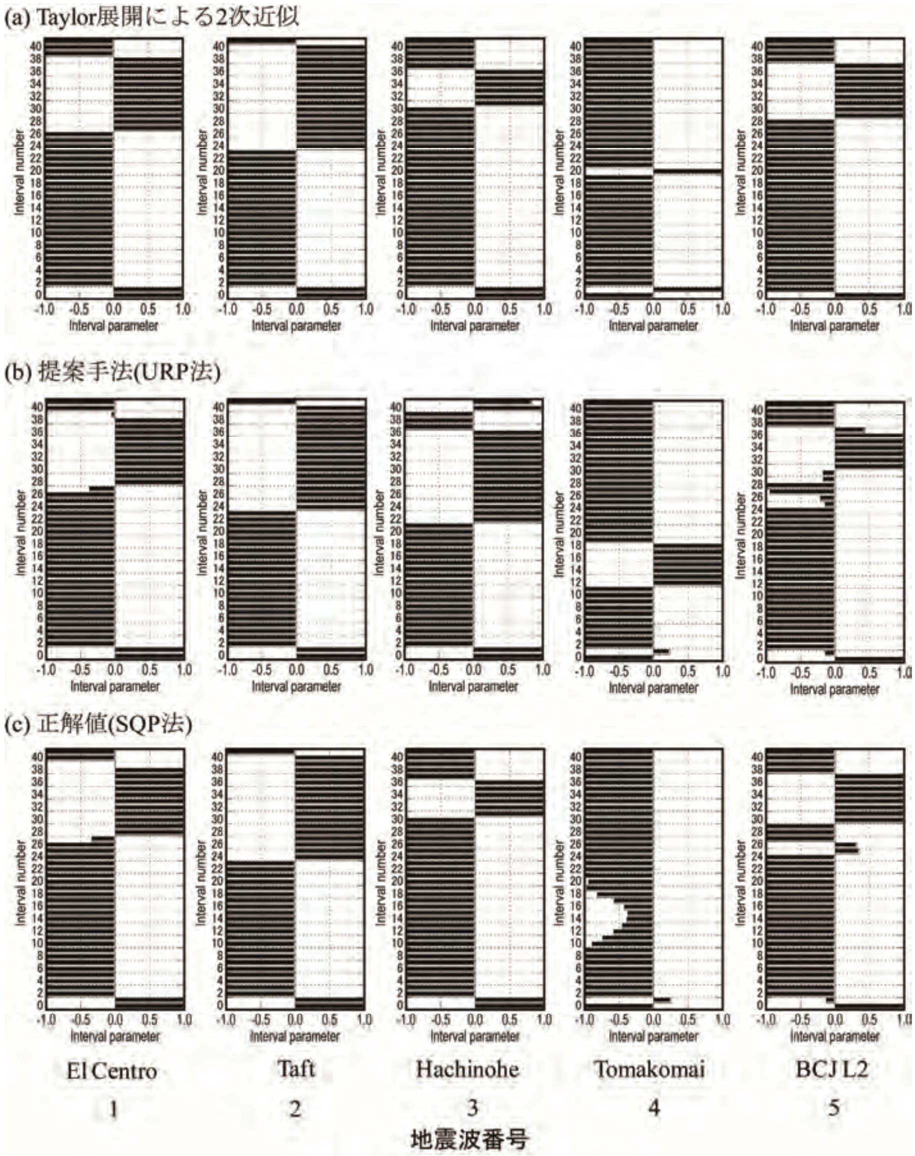


図 6-12 頂部絶対加速度の上限値を与える構造物パラメターの比較
(a) Taylor 展開による 2 次近似，(b) 提案手法, (c) SQP 法

ことが確認できる。特に，図 6-12(b)と図 6-12(c)を比較すれば，上部構造物パラメターの分布が一部異なる部分が存在するものの，免震層減衰係数（インタバル変数番号１）および免震層剛性（番号２）のクリティカルな分布がほぼ一致しているため， URP 法は頂部絶対加速度応答の最大値に対しても不確定パラメターに対する上限値を高精度に評価することが可能となっていると考えられる。

通常の免震建物の設計では，上部構造の構造物特性のばらつきを考慮することは稀である。免震層水平変位に関しては，免震層の特性変動による影響が支配的であるが，層間変位や頂部絶対加速度などの上部構造物に関する応答は，上部構造物の構造物パラメターのばらつきによる影響を無視することができないため，設計時には配慮すべきである。

6.6　弾塑性応答に対する URP 法の精度検証

6.5 節で扱った数値例では，免震アイソレータとして天然ゴム系積層ゴム(NRB)を採用し，免震層

の付加ダンパーとしてオイルダンパーを適用した。従って，前節では免震建物モデルにおける地震時応答を線形時刻歴応答解析により評価することが可能であった。一方，免震アイソレータとして鉛プラグ入り積層ゴム(LRB: Lead Rubber Baring)や高減衰積層ゴム(High Damping Rubber Baring)を用いる場合や, 付加ダンパーとして鋼棒ダンパー等を用いる場合には，免震層の復元力特性が非線形性を有するため, 免震アイソレータの復元力特性に関するモデル化する必要がある。従って，地震時の挙動を精度よく評価するためには弾塑性時刻歴応答解析を実施する必要がある。本節では，LRB を用いた基礎免震を有する免震建物モデルを対象とし，弾塑性時刻歴応答解析を用いた不確定性解析法についてこれまでに構築した提案手法の適用性を検証する。その結果に基づき弾塑性構造物に対する不確定性解析法を展開する。

6.6.1 鉛プラグ入り積層ゴムアイソレータ(LRB)を有する免震建物モデルの特性

LRB は，天然ゴム系積層ゴムの中央部に円柱状の鉛プラグを圧入したものである。LRB の履歴特性は，積層ゴムの水平剛性と鉛の履歴特性の組み合せとして表わされるため，一般的にバイリニア型でモデル化される。本節で扱う LRB の復元力特性を図 6-13 に示す。バイリニア型の履歴特性を有する LRB の水平免震性能は，2 次剛性 K_d と切片荷重 Q_d により特徴づけられる。変形レベルが小さい領域では，鉛プラグによる水平剛性が卓越している。一方，鉛プラグの降伏後では，積層ゴムによる水平剛性が発現するため，鉛プラグ降伏後の 2 次剛性 K_d は次式で与えられる。

$$K_d = A_r G_r / h_r + A_p G_p / h_r \tag{6-21}$$

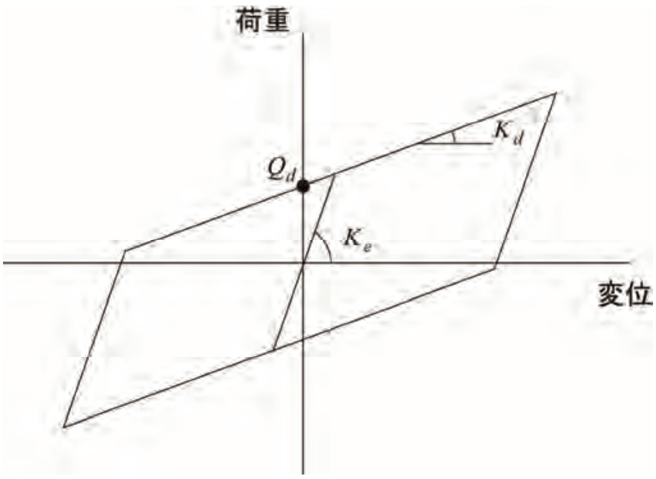


図 6-13 鉛プラグ入り積層ゴムアイソレータの復元力特性（バイリニア型）

表 6-4 LRB の諸元

ゴムのせん断弾性係数[N/mm^2]	0.385
ゴム外径[mm]	1100
鉛のせん断弾性係数[N/mm^2]	0.588
鉛プラグ径[mm]	200
ゴム総厚[mm]	252
数量	23

ここにA_r, A_p, G_r, G_p, h_rは，積層ゴムにおけるゴム部の断面積，鉛プラグの断面積，積層ゴムのせん断弾性率，鉛プラグのせん断弾性率，ゴムの総厚をそれぞれ表す。一般的にG_rおよびG_pはひずみ依存性を有しているが，ここでは簡易のためひずみ依存性を考慮しない。初期剛性(除荷剛性) K_eは 2 次剛性に対する比率で与え，ここでは$K_e / K_d = 13$とする。また，LRB の切片荷重Q_dは，鉛プラグの降伏応力τ_pと関連付けられ，次式で与えられる。

$$Q_d = A_p \tau_p \tag{6-21}$$

表 6-4 に本数値例で用いる LRB の諸元を記す。表 6-4 に示すゴム径および設置台数については，長期圧縮荷重の制約条件を満足するものとして得られた一例である。また，LRB による基礎免震を有する免震建物の 1 次固有周期については, 免震層の復元力特性において鉛プラグ降伏後に積層ゴムによる剛性が発現することを考慮し, 2 次剛性を免震層の水平剛性とみなせば, 5.40s となっている(上部構造物を質点系とみなし，複素固有値解析により評価)。

上部構造物については，6.5 節と同様に扱う。上部構造物の諸元については表 6-2 に記している。但し，LRB は，鉛プラグによるエネルギー吸収が期待されるため免震層には付加ダンパーを設けないものとする。

6.6.2　ばらつきを考慮する不確定パラメター

本節においてばらつきを考慮する構造物パラメター$\mathbf{X}$は，LRB の 2 次剛性K_d，LRB の初期剛性K_e，上部構造物の構造減衰係数$\mathbf{c}_\mathrm{f}$および上部構造物の層剛性$\mathbf{k}_\mathrm{f}$とし，本節におけるインタバル数$\mathbf{X}^I$を次のように表わす。

$$\mathbf{X}^I = \left\{ K_d^I, K_e^I, \mathbf{c}_\mathrm{f}^I, \mathbf{k}_\mathrm{f}^I \right\} \tag{6-22}$$

インタバル変数の変動の上下限を与える$\bar{\boldsymbol{\alpha}}$および$\underline{\boldsymbol{\alpha}}$は，前節と同様にインタバル変数の変動幅をノミナル値で除したもので定義し，次式で表わす。

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \left\{ \frac{\Delta \bar{K}_d}{K_d^c}, \frac{\Delta \bar{K}_e}{K_e^c}, \frac{\Delta \bar{c}_{\mathrm{f}_1}}{c_{\mathrm{f}_1}^c}, \cdots, \frac{\Delta \bar{k}_{\mathrm{f}_1}}{k_{\mathrm{f}_1}^c}, \cdots \right\}, \quad \underline{\boldsymbol{\alpha}} = \left\{ \frac{\Delta \bar{K}_d}{K_d^c}, \frac{\Delta \bar{K}_e}{K_e^c}, \frac{\Delta \underline{c}_{\mathrm{f}_1}}{c_{\mathrm{f}_1}^c}, \cdots, \frac{\Delta \underline{k}_{\mathrm{f}_1}}{k_{\mathrm{f}_1}^c}, \cdots \right\} \tag{6-23a,b}$$

表 6-1 に示したように LRB において不確定性を考慮すべき特性として，2 次剛性および切片荷重が挙げられるが(日本免震構造協会, 2010)，切片荷重の変動が免震層の水平変位応答に及ぼす影響はほとんど見られなかったため，ここでは LRB の 2 次剛性と初期剛性を不確定パラメターとして考慮する。なお，2 次剛性と初期剛性は相関性を有していると考えられるが，本節における数値例ではそれぞれのパラメターが独立に変動するものとする。

6.6.3　2 次多項式近似を用いた不確定性解析法

6.5 節の数値例では，本章で提案する不確定性解析法が天然ゴム系積層ゴムアイソレータ(NRB)で構成された基礎免震を有する免震構造物のロバスト性を評価する上で有効であることを明らかにした。不確定パラメターの変動に対する目的関数の変動を現在の基準点周りにおける Taylor 展開により近似する方法を用いる場合には, 目的関数が不確定パラメターの変動に対して連続的に変化し，微

分可能な関数である仮定が必要となる。しかしながら，弾塑性時刻歴応答解析における応答解析結果から数値感度を高精度に評価することは困難であることが一般的に知られており，弾塑性構造物に対して Taylor 展開に基づく不確定性解析法を適用することが妥当かどうかについては議論の余地がある。本項では，応答解析手法として弾塑性時刻歴応答解析を用いる場合において，不確定パラメターの変動に対する目的関数の変動を Taylor 展開による近似により評価することの妥当性について検証する。

図 6-14 は，入力波 El Centro NS (1940) (但し最大速度 50cm/s で正規化）に対して LRB の 2 次剛性 K_d を変化させた際の免震層の最大水平変位を逐次応答解析により評価したものである。同図中には，ノミナルモデル(ノミナルモデルに対する 2 次剛性の変動比=1)において感度解析を実施して得られる Taylor 展開による 2 次近似曲線も図示している。図に示すようにノミナルモデルにおける 2 次剛性 K_d に対する 1 次感度(＝勾配ベクトル)は正の勾配となっている。従って，Taylor 展開に基づく不確定性解析法では，2 次剛性の上限値(ノミナルモデルに対する 2 次剛性の変動比=1.27)において Taylor 展開による 2 次近似で表わされた目的関数の変動が最大となることを示唆している。しかしながら，2 次剛性を連続的に変動させ，逐次弾塑性時刻歴応答解析を実施して得られる免震層最大水平変位

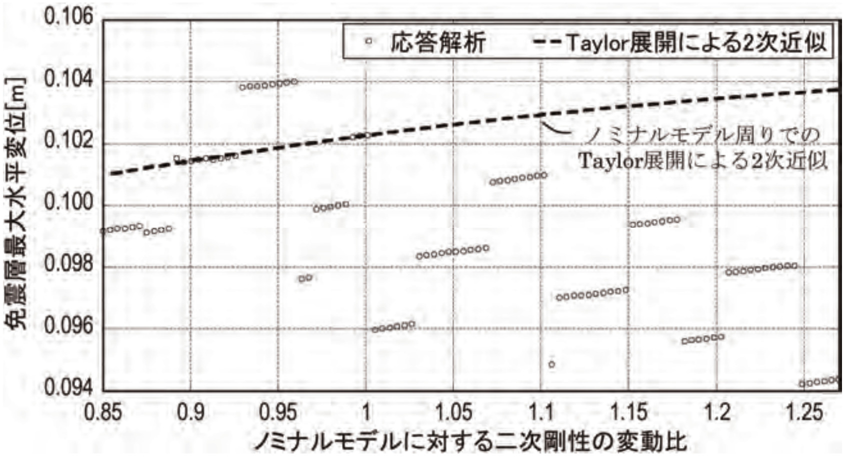


図 6-14 LRB の 2 次剛性の変動に対する免震層最大水平変位の変化と 2 次近似の比較

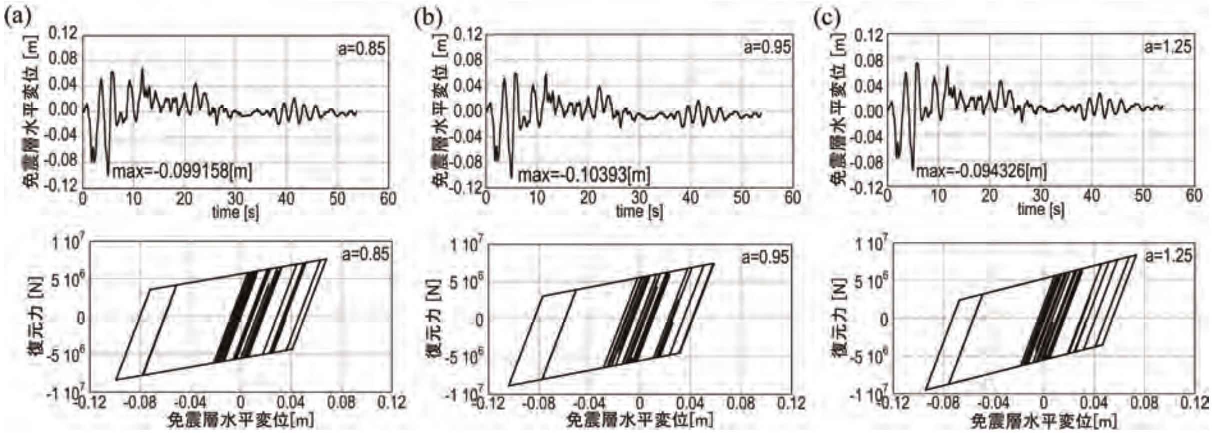


図 6-15 2 次剛性の変動比 α の変化に対する免震層水平変位の時刻歴と復元力の比較

(a) $\alpha = 0.85$, (b) $\alpha = 0.95$, (c) $\alpha = 1.27$

の推移は，2 次剛性の変動領域内において不連続に変化しており，ノミナルモデルに対する 2 次剛性の変動比が 0.95 程度のときに免震層の最大水平変位は最大となっている。このことから，目的関数をノミナルモデルにおいて Taylor 展開して得られる目的関数の近似と実際の目的関数の変動は合致しないことがわかる。従って，前節までに展開してきた Taylor 展開による 2 次近似を用いる不確定性解析法を弾塑性応答に対して適用することは精度上問題があると考えられる。

図 6-15 は，ノミナルモデルに対する 2 次剛性の変動比が 0.85，0.95 および 1.27 の場合における免震層水平変位の時刻歴波形および履歴ループを図示したものである。図 6-15 より，2 次剛性の変動により残留変形が変化しており，正側に残留変形が生じることにより免震層の最大水平変位(負側)が低下していることが確認できる。このことから，弾塑性応答解析における残留変形の有無が目的関数の不連続性に影響を与えていると考えられる。

高精度な不確定性解析を実施する上で，基準点周りの数値感度解析に基づく Taylor 展開近似は，基準点近傍での数値感度が必ずしも不確定パラメターの変動に対する目的関数の変動の傾向と一致しないため，弾塑性構造物に対して前節までで扱った手法を適用すること困難であるといえる。このような問題を解決する方法として，弾塑性時刻歴応答解析により得られたいくつかの応答値から不確定パラメターの変動に対する目的関数の変動を 2 次の多項式で近似する方法を用いる。

例えば，図 6-14 において，ノミナルモデルに対する応答値および不確定パラメターの変動域の上下限の端点に対する応答値の計 3 点の応答値が得られれば，目的関数の変動を 2 次多項式近似で一意に定めることが可能である(図 6-16)。いくつかのサンプル点から多項式近似により応答の変化を予測する手法は，いわゆる応答曲面法の一種であり，サンプル点の選定には特に注意が必要であるが，ここでは上述のようにノミナル値および不確定パラメターの変動域の上下限の端点から 2 次の多項式に帰着させる。

本章においてこれまで展開してきた不確定性解析法(例えば，図 6-4,5)では，不確定パラメターの変動に対する目的関数の変動を Taylor 展開による 2 次近似で評価したうえで，感度解析を実施する評価点を順次更新(=URP 法)し，目的関数の上限値を与える不確定パラメターの組み合せを探索する。一方，弾塑性応答を対象とする場合においても，2 次の多項式近似の各係数が既知であればこれを

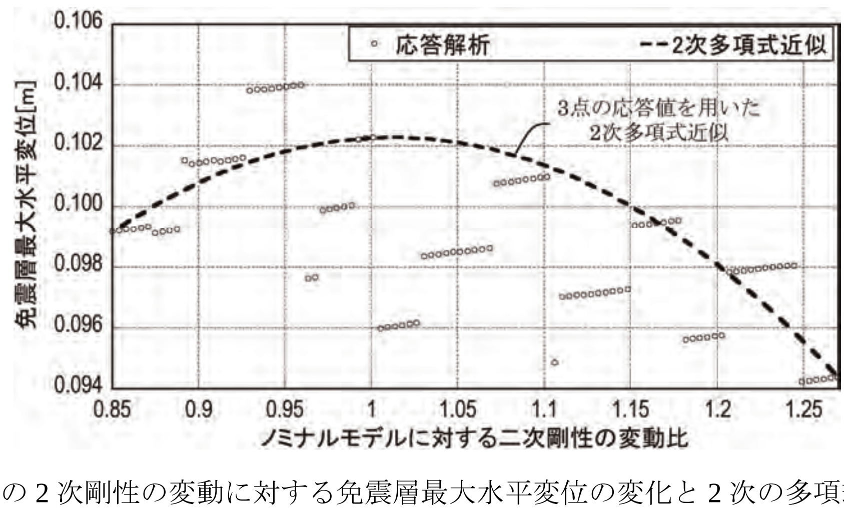


図 6-16 LRB の 2 次剛性の変動に対する免震層最大水平変位の変化と 2 次の多項式近似の比較

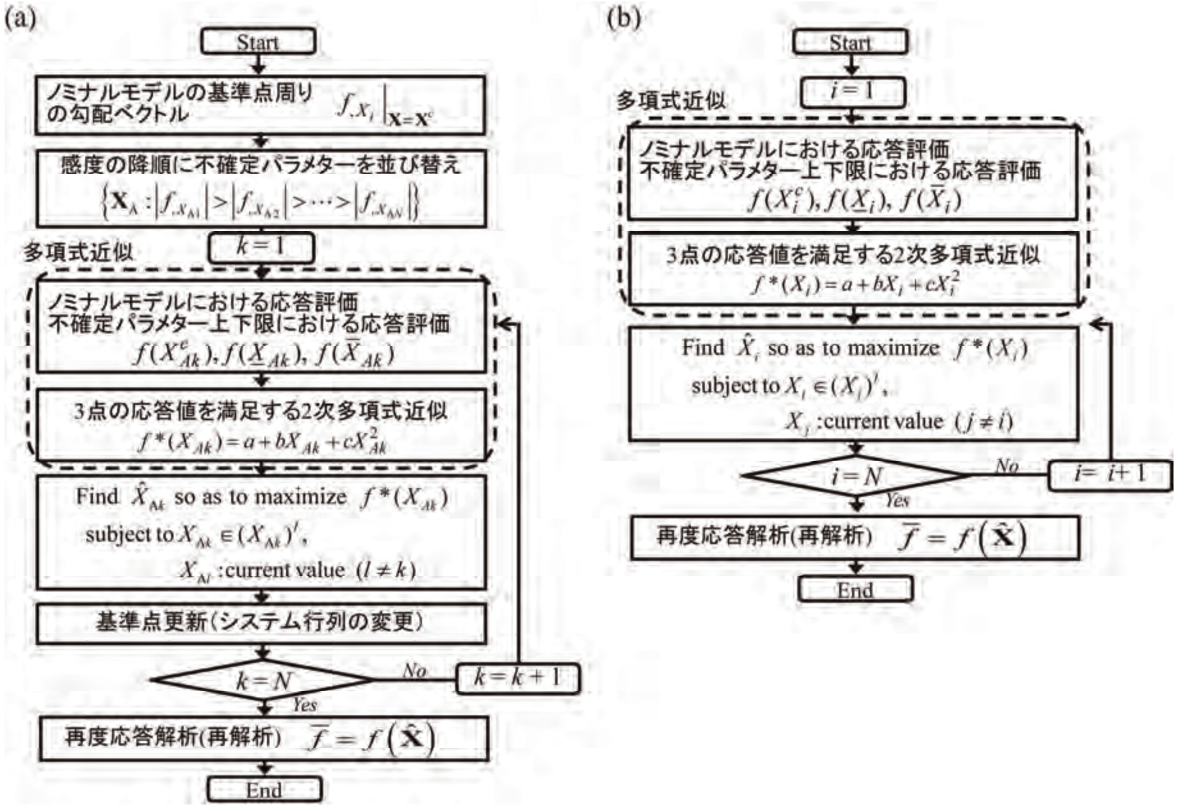


図 6-17 2 次多項式近似を用いる不確定性解析法のフローチャート
(a) URP 法, (b) FRP 法

最大化する不確定パラメターを陽に導くことが可能であるため，不確定パラメターの変動による目的関数の変動を 2 次の多項式近似に置き換えることで前述と同様な方法(=URP 法)を適用することが可能である。

2 次の多項式近似を用いる場合の不確定性解析法のフローチャートを図 6-17(a)に示す。Taylor 展開による近似を用いた URP 法では，まずはじめにノミナルモデルにおいて不確定パラメターに対する目的関数の勾配ベクトルを算定し，目的関数の変動に対して影響の大きいパラメターから順次基準点を更新する。しかしながら，弾塑性応答解析による数値感度から勾配ベクトルを評価することは信頼性に乏しいため，目的関数の変動に対して影響の大きいパラメターを見出すことが困難であると考えられる。後節の数値解析例では，基準点の更新を行わない方法(ここでは Fixed Reference Point 法と呼称：以下 FRP 法)についても比較する。FRP 法による不確定性解析のフローチャートを図 6-17(b)に記す。図 6-17 において，URP 法および FRP 法の特徴を比較すれば， URP 法ではノミナルモデル周りでの勾配ベクトルの評価やシステム行列の更新が必要になり計算機への負荷が増大する。URP 法における弾塑性応答解析の回数は，不確定パラメターの個数 N_X とすれば， $4N_X$ となる(ノミナルモデルにおける勾配ベクトルの算定= N_X ，各不確定パラメターの上下限値およびノミナル値に対する応答値= $3N_X$)。一方，FRP 法では，各不確定パラメターにおける上下限の端点に対する応答値を評価すればよく，弾塑性応答解析の回数は $2N_X$ となる。

6.6.4 免震層水平変位応答に関する不確定性解析

本節では，LRB 基礎免震を有する免震建物の地震時の免震層水平変位を目的関数とする不確定性解析を実施する。(6-23)式のばらつきの度合い $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ および $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ を次のように与える。

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{cases}0.27 & (i=1)\\ 0.3 & (i=2)\\ 0.3 & (i=3,\cdots,N+2)\\ 0.1 & (i=N+3,\cdots,2N+2)\end{cases},\quad \underline{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{cases}0.15 & (i=1)\\ 0.3 & (i=2)\\ 0.3 & (i=3,\cdots,N+2)\\ 0.1 & (i=N+3,\cdots,2N+2)\end{cases} \tag{6-24a,b}$$

(6-24)式において，i は不確定パラメターのインタバル番号を表し，$i=1$ は LRB の 2 次剛性 K_d，$i=2$ は LRB の初期剛性 K_e をそれぞれ表わす。ここで K_d は，表 6-1 に従って正側と負側で変動幅を非対称とする。これは，積層ゴムが経年変化により硬化するためである。また，$i=3,\cdots,N+2$ は上部構造の減衰係数 $\mathbf{c}_{\mathrm{f}}$，$i=N+3,\cdots,2N+2$ は上部構造の層剛性 $\mathbf{k}_{\mathrm{f}}$ を表す。

図 6-18 は，免震層水平変位の時刻歴最大応答値に関する不確定性解析の結果を各入力地震波で比較したもので，同図中には構造物パラメターがばらついた際の免震層最大水平変位応答の上限値を (a) Taylor 展開による 1 次近似・再解析, (b) 2 次多項式近似による URP 法，(c) 2 次多項式近似による FRP 法で評価した結果とノミナル値をそれぞれ図示した。ここで，Taylor 展開による 1 次近似に基づいて目的関数の上限値を与える不確定パラメターの組み合せを見出す方法は，インタバル変数である不確定パラメターの変動域における上下限の端点のみを対象とする。前節までの方法では，(6-5)式に従って，勾配ベクトルの絶対値と区間幅を乗じることで目的関数の変動を近似していた。一方，本節における数値例では，前述したように勾配ベクトルの評価そのものが困難であり，変数によっては勾配が比較的大きくなってしまう場合があるため, (6-5)式で評価した目的関数の上下限値の変動幅が著しく大きくなる。そのため，ここでは Taylor 展開による 1 次近似により得られたインタバル変数の端点の組み合せに対して弾塑性時刻歴応答解析を実施し，応答の上限値を評価した。

再解析の手法を用いた不確定性解析法では，任意の不確定パラメターの組み合せに対して弾塑性時刻歴応答解析を実施して目的関数の上限値が評価されるため，不確定性解析により得られる推定値は不確定パラメターの変動空間における目的関数の集合の要素の一つである。従って，図 6-18 において不確定パラメターのばらつきに対する目的関数のばらつきの上限値が大きいほど不確定性解

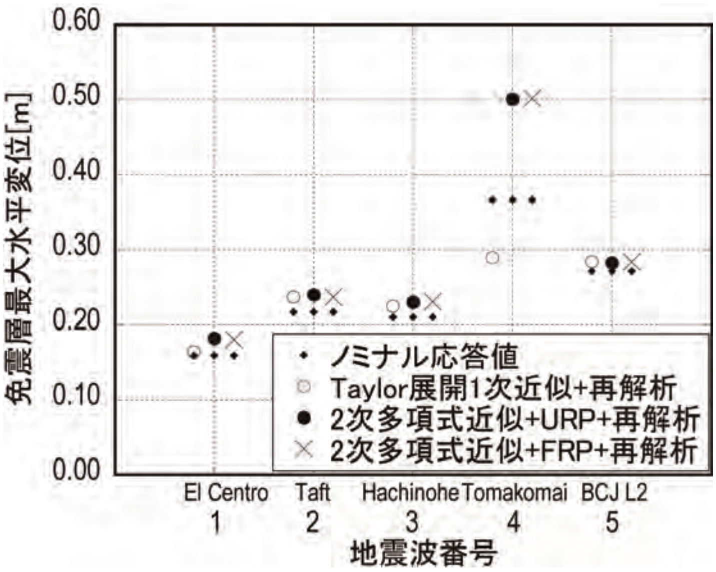


図 6-18 構造物パラメターのばらつきに対する免震層最大水平変位応答の上限値の推定

析手法としての優位性を有していることになる。

図 6-18 より，Taylor 展開による 1 次近似と再解析法を組み合せた不確定性解析では，Tomakomai 波においてノミナル値を下回る結果となっている。またその他の地震波についても，2 次多項式近似を用いる URP 法や FRP 法の結果に対して目的関数の上限値を過小に評価している。一方，目的関数を 2 次多項式で近似することで目的関数の非単調性を想定する本手法は，Taylor 展開による 1 次近似に比べて目的関数の上限値をより大きく推定しており，不確定性解析法としてより高信頼性を有していると言える。また，図 6-19 において，基準点の更新を行わない FRP 法の結果は，URP 法の方法とほぼ同レベルの応答値を出力しており，本数値例に関しては FRP 法でも十分な精度で不確定性解析を実施することが可能である。

図 6-19 は，それぞれの不確定性解析法で得られた目的関数の上限値を与えるインタバル変数の分布を図示したものである。Taylor 展開による 1 次近似を用いた方法では，ノミナルモデル周りにおける勾配ベクトルにより不確定パラメターの上下限の端点のいずれかにおいて目的関数の変動の増減を判定するため，不確定パラメターの上下限値の組み合せが得られている。一方，2 次の多項式近似を用いる URP 法および FRP 法では，2 次の多項式で近似された目的関数の変動項の極値を与える不確定パラメターを不確定パラメターの変動領域内においても探索するため，図 6-19 では多くの不

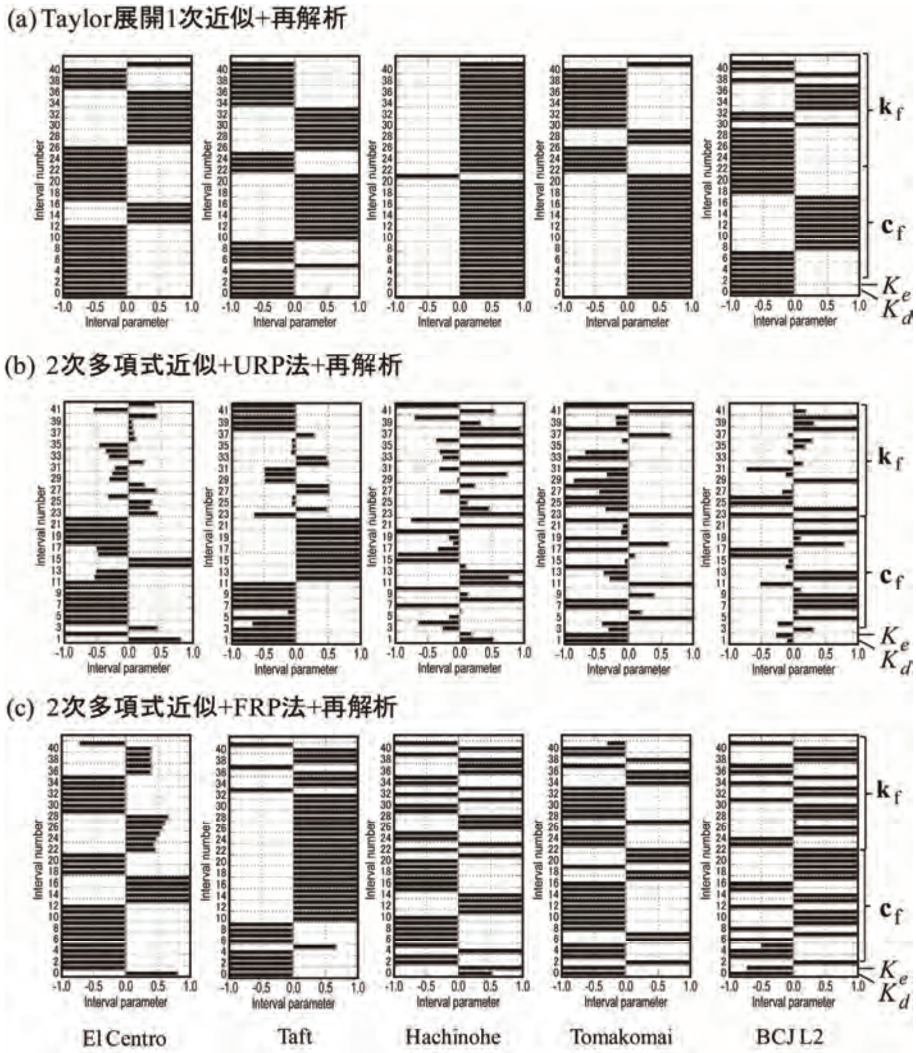


図 6-19 免震層最大水平変位応答の上限値を与える不確定パラメターの組み合せ

確定パラメターが変動領域内の値を取っていることが確認できる。

図 6-20 および図 6-21 は，Tomakomai EW (2003)に対するノミナルモデルおよび不確定性解析により得られた最悪な組み合せの構造物パラメターで構成される最悪モデルの免震層最大水平変位の時刻歴および積層ゴムの復元力をそれぞれ図示したものである。図より，最悪なばらつきに対して免震層最大水平変位が増大していることが確認できる。

図 6-18 では，不確定性解析法の違いによる目的関数の上限値の違いを検討した。一方，本節における数値例の比較対象とすべき正解値については示していない。これは，前述したように弾塑性応答を対象とする場合には, 正解値を見出すために感度に基づく勾配型のアルゴリズムの一種である SQP 法を適用することは信頼性が乏しいためである。そこで，本節では，乱数を用いて構造物パラメターの様々な組み合せに対する目的関数の変動を評価するモンテカルロシミュレーション(MCS) を適用し，構造物パラメターのばらつきに対する目的関数の上限値の精度検証を実施する。

MCS では，互いに独立な乱数のセットを不確定パラメターに適用して，不確定パラメターの組み

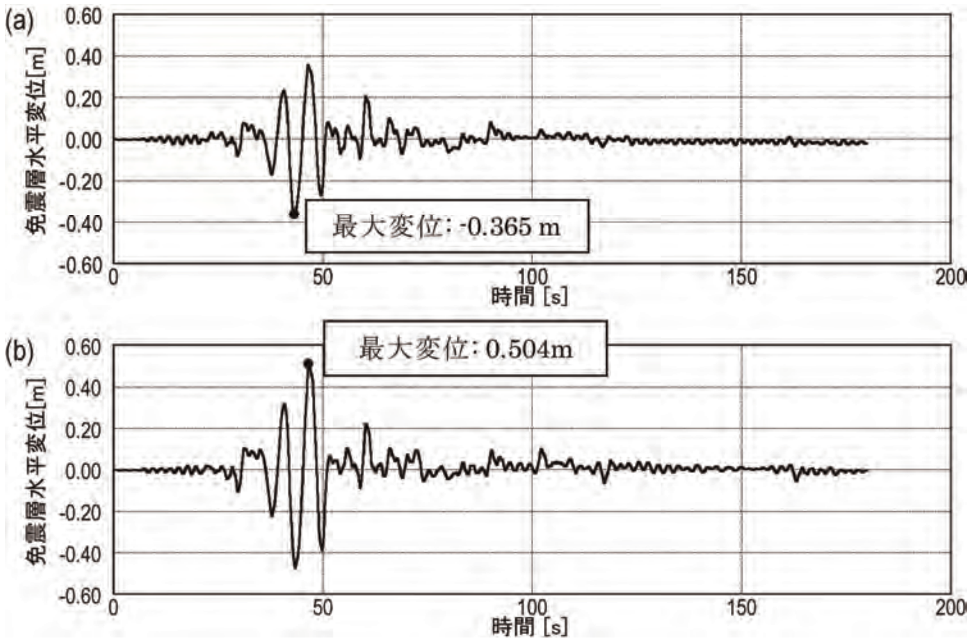


図 6-20 免震層水平変位の時刻歴の比較 (a) ノミナルモデル， (b) 上限値を与える最悪モデル

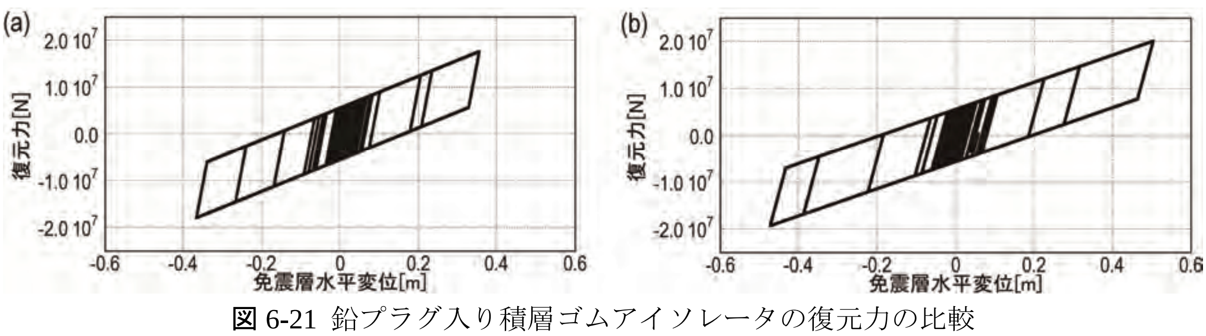


図 6-21 鉛プラグ入り積層ゴムアイソレータの復元力の比較

(a) ノミナルモデル, (b) 上限値を与える最悪モデル

合せをランダムに生成する。しかしながら，不確定パラメターが多数存在する場合には，目的関数の上限値を与える不確定パラメターの組み合せが生じる可能性は極めて低いため，目的関数の上限値に関する正解値を見出すことは困難である。ここでは，免震層最大水平変位に対して最も影響が大きいと考えられる構造物パラメター，すなわち免震層を構成する LRB の 2 次剛性および初期剛性の変動のみを考慮した MCS を実施する。尚，上部構造物の構造物パラメターに関しては，ノミナル値で固定することとする。

図 6-22 は，免震層の構造物パラメターの変動に関する MCS の結果と，免震層の構造物パラメターの変動のみを考慮した際に得られる変動区間の端点の組み合せ(＝LRB の 2 次剛性および初期剛性のばらつきの上下限値の組み合せ:4 通り) における Tomakomai EW に対する応答解析結果を比較したものである。図 6-22 より，LRB の 2 次剛性および初期剛性の変動に対して免震層最大水平変位は単調性を有しており，それぞれの変動区間の端点の組み合せにおいて目的関数の上限値が得られる。図 6-22 より，Tomakomai EW ではLRB の 2 次剛性および初期剛性いずれも下限値の場合がクリティカルであり，その時の目的関数の上限値は 0.489m となっている。これは，本提案手法で得られた上限値を下回っており，本提案手法により得られた応答上限値が妥当であることを示唆している。

また，表 6-5 は，LRB の 2 次剛性および初期剛性のみの変動を考慮した際の区間解析の結果と図 6-18 で得られた不確定性解析(FRP 法) の結果についてその他の地震波についても検討した結果をまとめたものである。太字は LRB のみの特性変動を考慮した際の区間解析による目的関数の上限値である。表 6-5 において，Tomakomai EW 以外について比較すれば，本提案手法により得られた目的関数の上限値の妥当性を確認できる。但し，図 6-18 に示した不確定性解析の結果は，上部構造物の構造物パラメターのばらつきも想定した結果である。従って，表 6-5 より，本提案手法により得られた目的関数上限値と LRB のみの特性変動を考慮した場合との差はほとんど見られないといえ，免震層最大水平変位に関しては Tomakomai EW を除いて，上部構造物の構造物パラメターのばらつきの影響は無視できると考えられる。

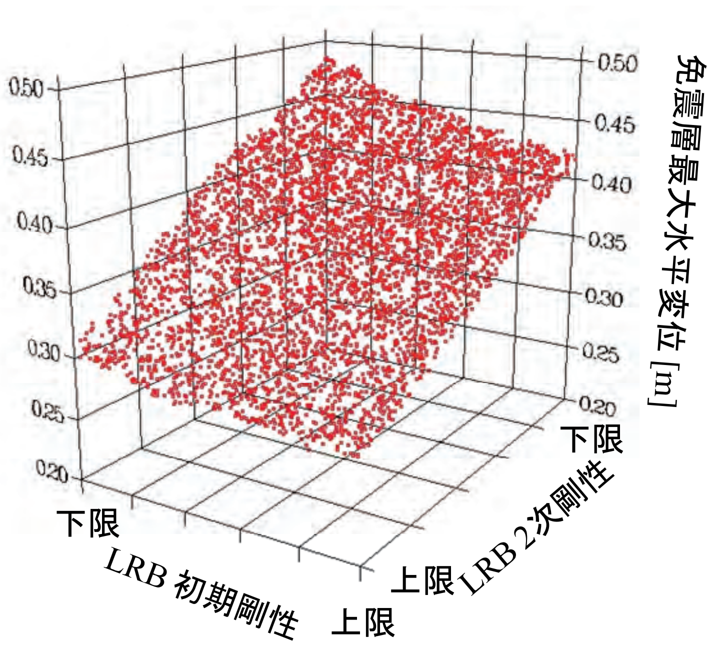


図 6-22 免震層の特性変動に対する免震層最大水平変位に関する MCS

表 6-5 LRB の特性変動に対する区間解析の結果と不確定性解析の結果の比較

LRB 2 次剛性	上限		下限		不確定性解析 (図 6-19 FRP)
LRB 初期剛性	上限	下限	上限	下限	
El Centro NS	0.150	**0.189**	0.144	0.156	0.180
Taft EW	0.204	0.216	0.218	**0.236**	0.237
Hachinohe NS	0.230	**0.231**	0.206	0.194	0.231
Tomakomai EW	0.280	0.309	0.420	**0.489**	0.502
BCJ-L2	0.235	0.266	0.281	**0.288**	0.284

6.7 異なる免震アイソレータを複合的に用いる免震建物に対する不確定性解析

6.5 節，6.6 節では，単一の積層ゴムアイソレータのみで構成される基礎免震を有する免震建物モデルをそれぞれ対象にしていた。しかしながら，免震建物における免震層の設計においては，特性の異なる免震アイソレータを複合的に適用し，配置計画を検討することも少なくない。例えば，鉛プラグ入り積層ゴムアイソレータ(LRB)は，鉛プラグによるエネルギー吸収が期待されるため，免震層の振動抑制のための付加ダンパーの設置数を削減することでコンパクトな免震機構を構築することが可能であるという特徴を有する。しかしながら，LRB のみで構成された基礎免震では，上部構造物の水平方向の絶対加速度応答に関しては低減効果が十分に得られない場合があるため，居住性を向上させるため天然ゴム系積層ゴムアイソレータ(NRB)やすべり支承を併用することが多い。

例えば，6.5 節および 6.6 節で用いた免震建物モデル(=上部構造物は同一で免震アイソレータの種別が異なる)の免震層最大水平変位のノミナル値はほぼ同レベルである(図 6-7 および図 6-18 を参照)。

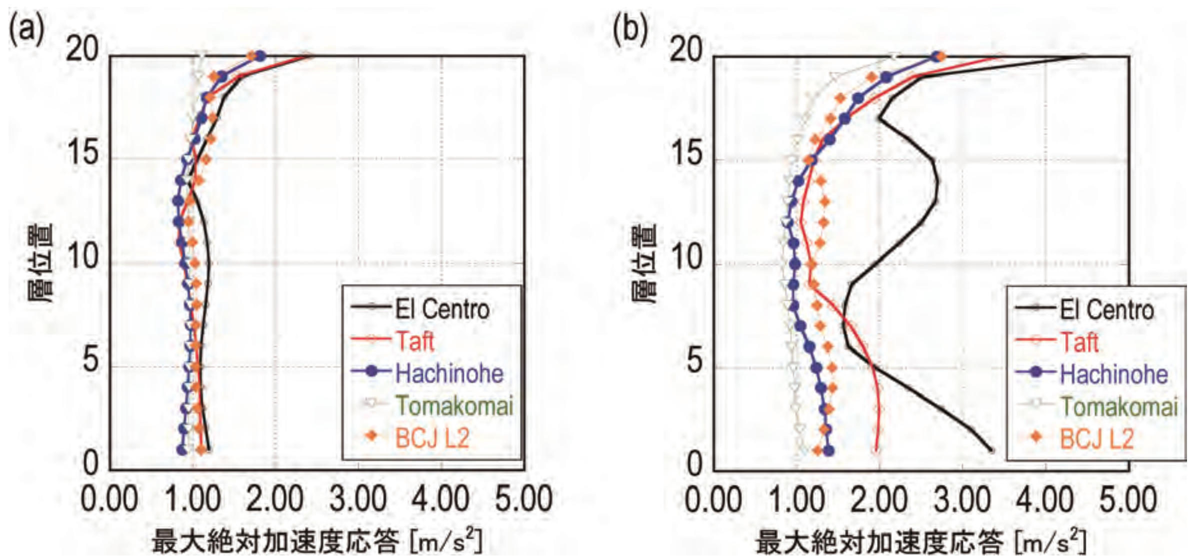


図 6-23 免震アイソレータの違いによる上部構造物の最大絶対加速度応答の比較
(a) NRB 基礎免震(28 基)+オイルダンパー, (b) LRB 基礎免震(23 基)

表 6-6 免震アイソレータの諸元

	NRB	LRB
ゴム外径[mm]	1100	
ゴム総厚[mm]	252	
ゴムのせん断弾性係数[N/mm²]	0.390	0.385
鉛プラグ径[mm]		200
鉛プラグせん断弾性係数[N/mm²]		0.588
台数	8	15

一方，各地震波に対する上部構造の絶対加速度の最大応答値を比較すれば(図 6-23)， LRB のみで構成された基礎免震(図 6-23(b))では，NRB およびオイルダンパーで構成された基礎免震(図 6-23(a))と比較して，絶対加速度応答の最大値がいずれの層においても大きいことが確認できる。病院等の可動式収容物が多い場合には，収容物の損傷を抑制するためには上部構造物の最大絶対加速度応答を 2.0m/s^2 程度に収めることが望ましい(免震構造設計指針,2001)とされており，LRB のみで構成された基礎免震は居住性という観点において不利である。

本節では，6.6 節で示した LRB 基礎免震を有する免震建物の数値例において，LRB の一部を NRB に置き換えたうえで，免震層に付加ダンパーを設けた免震建物モデルを対象とする。前節までで扱った免震建物モデルとの免震性能の変化について検証し,異なる免震アイソレータを複合的に用いた場合の地震時応答に関する不確定性解析を実施する。

6.7.1 NRB および LRB による基礎免震を有する免震建物モデルの特性

本節で扱う免震建物モデルでは，6.6 節で扱った免震建物モデルにおいて，23 基の LRB の一部を NRB に置き換える。ここでは，LRB15 基，NRB8 基を併用する場合を想定する。LRB の諸元については，前節と同様に与える。一方，NRB については外径をϕ1100mm とし，ゴム総厚を LRB と同様に与える。本数値例で扱う基礎免震を構成する各々のアイソレータの諸元を表 6-6 に示す。

上部構造物については，6.5 節と同様に扱う。上部構造物の諸元については表 6-2 に記している。また，免震層の振動制御のためにオイルダンパーを導入する。免震層のオイルダンパーの減衰係数は,上部構造物を剛体とみなした際に，NRB および LRB の二次剛性による水平剛性から算定される 1 次減衰定数が 0.1 となるように与える。付加ダンパーの減衰係数で比較すれば，本節で扱う数値例における付加ダンパーの減衰係数は，6.5 節で扱った数値例のおよそ 40%程度となっている。

6.7.2 ばらつきを考慮する不確定パラメター

本節においてばらつきを考慮する不確定パラメター$\mathbf{X}$は，免震層におけるオイルダンパーの減衰係数c_0，免震層の NRB によるアイソレータ剛性k_0，LRB の 2 次剛性K_d，LRB の初期剛性K_e，上部構造物の構造減衰係数$\mathbf{c}_\mathrm{f}$および上部構造物の層剛性$\mathbf{k}_\mathrm{f}$とし，インタバル変数$\mathbf{X}^I$を次のように表わす。

$$\mathbf{X}^I = \left\{ c_0^I, k_0^I, K_d^I, K_e^I, \mathbf{c}_\mathrm{f}^I, \mathbf{k}_\mathrm{f}^I \right\} \tag{6-25}$$

インタバル変数の変動の上下限を与える$\overline{\boldsymbol{\alpha}}$および$\underline{\boldsymbol{\alpha}}$はこれまでと同様に与え，その変動幅を次式で与える。

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{cases} 0.3 & (i=1) \\ 0.26 & (i=2) \\ 0.27 & (i=3) \\ 0.3 & (i=4) \\ 0.3 & (i=5,\cdots,N+4) \\ 0.1 & (i=N+5,\cdots,2N+4) \end{cases} \quad , \quad \underline{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{cases} 0.3 & (i=1) \\ 0.15 & (i=2) \\ 0.15 & (i=3) \\ 0.3 & (i=4) \\ 0.3 & (i=5,\cdots,N+4) \\ 0.1 & (i=N+5,\cdots,2N+4) \end{cases} \tag{6-26a,b}$$

iは不確定パラメターのインタバル番号を表し，$i=1$はオイルダンパーの減衰係数，$i=2$は NRB のアイソレータ剛性，$i=3$は LRB の 2 次剛性K_d，$i=4$は LRB の初期剛性K_eをそれぞれ表わす。また，$i=5,\cdots,N+4$は上部構造の減衰係数$\mathbf{c}_{\mathrm{f}}$，$i=N+5,\cdots,2N+4$は上部構造の層剛性$\mathbf{k}_{\mathrm{f}}$を表す。

6.7.3 ノミナルモデルにおける免震性能の比較

本項では，6.7.1 節で与えた免震建物モデルの地震時最大応答に関する免震性能を 6.5 節および 6.5 節で扱った免震建物モデルと比較し，本節で扱う免震建物モデルの免震性能を検証する。表 6-7 は，各地震波に対する免震層最大水平変位および頂部絶対加速度応答の最大値の5波平均値と5波のなかでの最大値を 3 つの免震建物モデルでそれぞれ比較したものである。表より，6.6 節で扱った数値例では, LRB のみの構成からなる免震建物モデルの免震層水平変位の最大応答レベルが 6.5 節で扱った NRB およびオイルダンパーの構成からなる免震建物モデルと同等であることが確認できる。表 6-7 で示した積層ゴムの直径はいずれもϕ1100 であり, LRB は高い免震性能を有しているために NRB と比較して設置台数を削減することが可能である，しかしながら，上部構造物への加速度入力の低減効果は薄く，頂部絶対加速度応答に関しては LRB のみで構成された免震建物モデルは不利である。一方，本節で扱う LRB，NRB およびオイルダンパーを併用した免震建物モデルでは，免震層の最大水平変位をその他の免震建物モデルと同等レベルに抑えた上で，LRB のみで構成された免震建物モデルにおいて問題となった上部構造物の絶対加速度応答を低減しており，居住性が向上している。

表 6-7 それぞれの免震建物モデルの地震時応答(レベル 2)の比較
(ノミナルモデルにおける最大応答値)

		NRB(28 基) +ダンパー(h=0.2)	LRB(23 基)	LRB(15 基) +NRB(8 基) +ダンパー(h=0.1)
免震層 水平変位 [mm]	5 波平均	229.2	244.5	230.3
	最大値 (地震波名)	355.2 (Tomakomai EW)	365.9 (Tomakomai EW)	354.1 (Tomakomai EW)
頂部 絶対加速度 [m/s^2]	5 波平均	1.88	3.10	2.52
	最大値 (地震波名)	2.41 (El Centro NS)	4.44 (El Centro NS)	3.52 (El Centro NS)

6.7.4 免震層水平変位応答に関する不確定性解析

図 6-24 は，LRB，NRB およびオイルダンパーで構成された基礎免震を有する免震建物モデルにおける免震層最大水平変位に関する不確定性解析の結果を図示したものである。図 6-24 では，前節と同様に(a) Taylor 展開による 1 次近似・再解析, (b) 2 次多項式近似による URP 法，(c) 2 次多項式近似による FRP 法で評価した結果とノミナル値をそれぞれ比較する。

図 6-24 より，前節で得られた結果とほぼ同様な傾向がみられる。例えば，Taylor 展開による 1 次近似と再解析法を組み合せた不確定性解析では，Tomakomai EW においてノミナル応答値を下回る応答上限値が得られており, 構造物パラメターのばらつきに対する目的関数の上限値を評価できていない。一方，2 次多項式近似による URP 法や FRP 法では，ほぼ全ての地震波について応答上限値が一致している。但し，El Centro NS については，URP 法の結果がノミナル応答値とほぼ同レベルとなっており，応答上限値の評価に問題がある。表 6-8 は，図 6-24 で得られた結果の妥当性を検証するために，免震層の構造物特性(= c_0，k_0，K_d，K_e）のばらつきのみを考慮した際の通常の区間解析による結果をまとめたものである。但し，前節で示した例では免震層における構造物パラメターにおける不確定パラメターが 2 種(=LRB の 2 次剛性 K_d および初期剛性 K_e）であったため，区間変数の

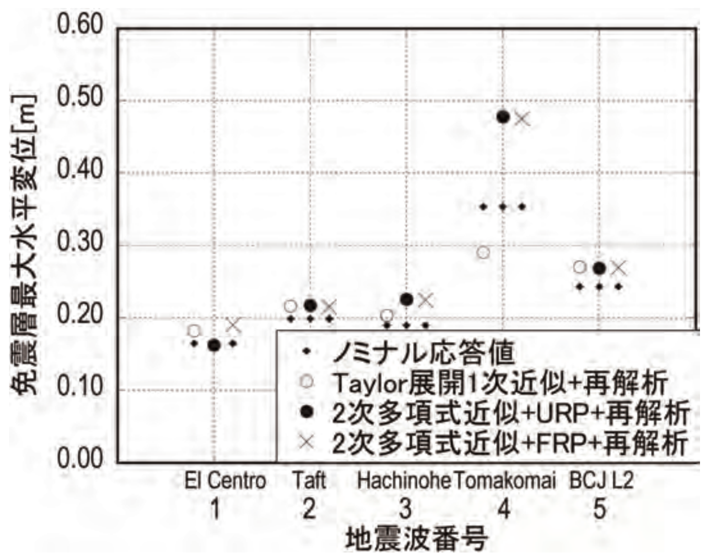


図 6-24 構造物パラメターのばらつきに対する免震層最大水平変位応答の上限値の推定

表 6-8 免震層の構造物特性の変動に対する区間解析の結果と不確定性解析の結果の比較
(免震層最大水平変位[m])

地震波	免震層区間解析(上限値) 上部：ノミナル値	不確定性解析 (図 6-24 URP)	不確定性解析 (図 6-24 FRP)
El Centro NS	0.193	0.163	0.190
Taft EW	0.216	0.218	0.216
Hachinohe NS	0.226	0.226	0.224
Tomakomai EW	0.474	0.478	0.476
BCJ-L2	0.216	0.269	0.270

端点の組み合せは 4 通りであるのに対して，本数値例では区間変数の端点の組み合せは 16 通りとなる。不確定パラメターの個数に応じて区間変数の端点の組み合せは指数関数的に増大するため，上部構造物の構造物パラメターの特性変動を含めた不確定性解析は，従来の区間解析法では困難である。

表 6-8 に示したように上部構造物のばらつき考慮したうえで本提案手法(URP 法，FRP 法) により評価した目的関数の上限値と免震層のみのばらつきを考慮した従来の区間解析法の結果には有意な差は見られない。このことから，本提案手法により得られた目的関数の上限値が妥当といえる。さらに，本項で示した免震層の水平変位に対する不確定性解析では，免震層の特性変動の影響が顕著であるため，上部構造物の構造物パラメターのばらつきの影響はほとんどないと考えられる。

6.7.5 頂部絶対加速度応答に関する不確定性解析

免震建物の構造設計時において免震層の特性変動の影響を考慮する場合には, 不確定パラメターの上下限値の組み合せに対して応答解析を実施し, 免震構造物の安全性を確認することは一般的である。この際には通常，上部構造物の構造物パラメターのばらつきを考慮しない。従って，ばらつきを考慮する構造物パラメターが免震層の特性変動のみであれば, 変動区間の端点の組み合せ数が限られているため，従来の区間解析法に従って目的関数の上下限値を評価することが可能である。

本提案手法の特徴は, 不確定パラメターが多数存在した場合にも効率的に目的関数の上限値を評価可能である点である。前項の数値例では，免震層の最大水平変位において上部構造物の構造物パラメターのばらつきの影響はほとんどないことを確認しており, 現行の免震建物設計時に免震層の特性変動のみ考慮した検討で十分であるということを示唆している。そこで，本項では，本節で扱う免震建物モデルにおける頂部絶対加速度応答に関する不確定性解析を実施し，本提案手法の有用性を示す。

表 6-9 は，NRB，LRB およびオイルダンパーで構成される基礎免震を有する免震建物モデルにおける頂部最大絶対加速度応答のノミナル値, 免震層のみの特性変動を考慮した従来の区間解析により得られる応答上限値, 免震層および上部構造物の構造物パラメターのばらつきを考慮した本提案手法(URP 法, FRP 法) により得られた応答上限値をそれぞれ比較したものである。入力波は，絶対加速度応答が大きい標準 3 波とする。表 6-9 より，頂部絶対加速度応答に関しては，上部構造物の構造物パラメターのばらつきの影響が顕著に現れていることが確認できる。すなわち，免震層のみばらつきを考慮した際の応答上限値は，ノミナル応答値に対して 3 波平均で 7.3%の増大となっている。一方，上部構造物の構造物パラメターのばらつきを考慮した URP 法により評価される応答上限値は，ノミナル応答値に対して 3 波平均で 21.9%の増大となっている。端点の組み合せを総当りで探索する従来の区間解析法では，上部構造物の構造物パラメターのばらつきを考慮することは困難であるため，目的関数の特性に応じて本提案手法を適用することで高精度な不確定性解析が実施可能である。

表 6-9 免震層の構造物特性の変動に対する区間解析の結果と不確定性解析の結果の比較

地震波	ノミナル応答値 [m/s^2]	区間解析 上部:ノミナル値	URP 法	FRP 法
El Centro NS	3.52	3.76	4.28	4.37
Taft EW	3.27	3.51	4.26	3.06
Hachinohe NS	2.45	2.64	2.79	2.91

6.8 結論

本章では，入力のみならず構造物特性の不確定性を考慮することを目的とし，従来の区間解析法では扱うことが困難であった目的関数が非単調性を有する問題に対しても有効な新しい区間解析法(Updated Reference-Point 法)を構築した。免震建物では，積層ゴムアイソレータの特性変動が免震性能に影響を及ぼすことが懸念され，ばらつきを考慮した設計問題の代表例として相応しいと考えられるため, 本章では基礎免震を有する免震建物を対象とした。本章により得られた結論は下記のとおりである。

1) <u>構造物特性の不確定性を考慮したロバスト性評価法の構築</u>

種々の入力地震動に対する免震層水平変位および頂部絶対加速度応答の最大値を目的関数とし，免震層および上部構造物の不確定性を考慮した場合の目的関数のばらつき，即ち免震建物のロバスト性を効率的に評価する独自の方法を提示した。本手法により，製作誤差，温度・振動数依存性や経年変化等によるアイソレータやダンパーの性能のばらつき，さらには上部構造の剛性変動（RC 構造ではヤング係数などによる変動）という種々の不確定性に対する免震性能の変化を高精度に評価することが可能である。

本手法は，不確定性解析における有力な方法の一つである区間解析法において，目的関数を Taylor 展開により近似する既往の方法を拡張したものである。即ち，Taylor 展開による 2 次近似で表わされた目的関数の最大値および最小値を与える構造物パラメターが，目的関数の勾配ベクトルならびに Hessian 行列により陽に表わされることを利用している。通常の区間解析法は目的関数の単調性を前提としており（Inclusion monotonic 仮定），不確定パラメターの変動幅の上下限において目的関数を評価している。一方，本提案手法は目的関数の非単調性を考慮することが可能であり，不確定パラメターのばらつきの度合いが大きい問題に対しても有効である。

2) <u>勾配ベクトルおよび Hessian 行列を評価する基準点を更新する URP 法の提案</u>

目的関数を最大化（もしくは最小化）する不確定パラメターの組み合せを高精度に見出すには，Taylor 展開による 2 次近似で表された目的関数を最大化 (もしくは最小化）する不確定パラメターを求めた上で，不確定パラメターの変動に応じて現在の状態から目的関数の基準点を更新する Updated Reference Point (URP)法が有効であることを示した。URP 法では，目的関数の基準点が更新された際に, 対象とする不確定パラメターに対する現在の基準点まわりにおける各次の感度を逐次評価する必要があり，応答解析の負荷は増大する。しかしながら URP 法では，制約付き最適化問題を逐次 2 次計画法(SQP 法)に代表される種々の方法で詳細に評価する方法に対して比較的短時間でかつ極めて高精度な結果を得ることが可能である。

3) <u>免震建物の地震時限界応答に関するロバスト性評価</u>
(天然ゴム系積層ゴムアイソレータ+オイルダンパー)

天然ゴム系積層ゴムアイソレータとオイルダンパーで構成される基礎免震を有する 20 層免震建物を対象とし, 最大速度で基準化した代表的な入力地震波に対して構造物パラメターの不確定性を想定した場合の構造物応答のばらつきを評価した。種々の地震波に対するノミナルモデルにおける応答値がほぼ同レベルであっても, 地震波の特性に依存して目的関数のばらつきの変動幅は大きく異なるこ

とを示した。免震層水平変位については，免震層減衰係数は，設計値を下回った場合が全ての地震波において不利である。一方，免震層剛性については地震波によりクリティカルとなるケースが異なり，必ずしもばらつきの上下限値において構造物応答が最大化されるとは限らないため，目的関数の非単調性を考慮できる本手法が極めて有効であることを示した。

天然ゴム系積層ゴムアイソレータによる基礎免震を有する免震建物の免震層水平変位については，ノミナルモデルにおいて応答値が大きくなる長周期地震動に対して特に留意する必要がある。これは，構造物パラメターの変動による免震建物の周期の変化が，免震層の挙動に対して敏感となるためであると考えられる。数値例で対象とした Tomakomai EW(2003)では，クリティカルな構造物パラメターの組み合せに対する免震層水平変位がノミナルモデルにおける応答値に対して 1.39 倍となっている。

天然ゴム系積層ゴムアイソレータによる基礎免震を有する免震建物の頂部絶対加速度応答については，地動最大加速度が大きい地震波においてばらつきが大きくなる傾向にある。数値例で対象とした Taft EW(1952)では，ノミナルモデルにおける応答値に対して 1.43 倍となっている。頂部絶対加速度応答を最大化するクリティカルな不確定パラメターの分布の傾向においては，免震層の層剛性が正側に分布することが多い。アイソレータとして積層ゴムを用いる場合では，経年変化によるゴムの硬化が懸念されており，頂部絶対加速度応答に及ぼす影響については設計時に留意する必要がある。

4) <u>弾塑性応答に対して 2 次多項式近似を適用した不確定性解析法の構築</u>

鉛プラグ入り積層ゴムアイソレータ(LRB)で構成される基礎免震を有する 20 層免震建物を対象とした場合に，本提案手法の適用性について検討した。LRB はバイリニア型の非線形な復元力特性を有するため，地震時応答の評価には弾塑性時刻歴応答解析を実施する必要がある。目的関数として弾塑性応答を扱う場合では，ノミナルモデルにおける数値感度の評価が困難であるため，ノミナル応答値および不確定パラメターの上下限の端点で評価される応答値から不確定パラメターの変動に対する目的関数の変動を 2 次の多項式近似を用いる方法を提示した。2 次の多項式近似で表される目的関数の変動に対してその極値を与える不確定パラメターの組み合わせを解析的に見出すことで，弾塑性系に対しても URP 法が適用可能であることを示した。

LRB 基礎免震を有する免震建物の免震層水平変位については，地震波によりばらつきの影響の程度に顕著な差が見られた。特に Tomakomai EW (2003) に対しては，目的関数の上限値のノミナル応答値に対する変動率が大きく，免震層の水平変位が 50cm 程度に達している。従って，不確定性解析においては，構造物パラメターのばらつきが免震性能に及ぼす影響を十分配慮する必要がある。この事実は LRB と天然ゴム系積層ゴムアイソレータを複合して用いた場合についても同様である。また，提案手法により得られた目的関数の上限値と，LRB の特性変動のみを考慮したモンテカルロシミュレーションならびに区間解析の結果を比較することで，本提案手法は弾塑性応答を扱う場合にも不確定性解析法として信頼性の高い方法であることを明らかにした。

数値感度の評価が困難である弾塑性応答を扱う場合には目的関数の変動に影響の大きい不確定パラメターを見出すことが困難であり，基準点を更新しながら不確定パラメターの組み合せを探索する URP 法は尚数値的な問題点を有している。それに比べて，基準点を更新せずにノミナル応答値と各不確定パラメターが独立にばらついた際の応答値から 2 次の多項式近似を行う Fixed Reference Point 法では，大きな計算負荷を伴わずに不確定性解析を実施することが可能であることを明らかにした。

参考文献

Attard, T.L. (2007). “Controlling all interstory displacements in highly nonlinear steel buildings using optimal viscous damping”, *J. Struct. Eng., ASCE*, **133**(9),　pp1331-1340.

Alefeld G, Herzberger J. (1983). "Introduction to interval computations", New York: Academic Press.

Ben-Haim Y and Elishakoff I. (1990). "Convex models of uncertainty in applied mechanics". Amsterdam: Elsevier.

Ben-Haim Y (2001). "Information-gap decision theory: decisions under severe uncertainty". Academic Press, San Diego.

Chen SH, Lian H and Yang X. (2002). "Interval static displacement analysis for structures with interval parameters", *Int J Numer Meth Engrg*, **53**, pp393-407.

Chen SH, Lian H.and Yang X. (2003). "Interval eigenvalue analysis for structures with interval parameters", *Finite Element in Analysis and Design*, **39**, pp419-431.

Chen SH, Wu J. (2004). "Interval optimization of dynamic response for str 7 uctures with interval parameters", *Comp Struct*, **82**, pp1-11.

Chen SH, L. Ma, G Meng and R. Guo (2009). "An efficient method for evaluating the natural frequency of structures with uncertain-but-bounded parameters", *Comp. Struct.*, **87**, pp582-590.

Degrauwe D., Lombaert G., De Roeck G. (2010). "Improving interval analysis in finite element calculations by means of affine arithmetic", *Comp Struct*, **88**, pp247-254.

Donders S, Vandepitte D, van de Peer J, Desmet W. (2005). "Assessment of uncertainty on structural dynamic responses with the short transformation method", *J Sound & Vib*, **288**(3), pp523-543.

Dong W. and Shah. H. (1987). "Vertex method for computing functions of fuzzy variables", *Fuzzy Sets and Systems*, **24**(1), pp65-78.

El-Gebeily MA, Abu-Baker Y., Elgindi MB. (1999). "The generalized eigenvalue problem for tridiagonal symmetric interval matrices", *Int J Control*, **72**, pp531-535.

藤田皓平，竹脇　出，(2011). "不確定な構造特性を有する免震建物のロバスト性評価のための地震時応答限界解析"，日本建築学会構造系論文集，第 76 巻，第 666 号, pp1453-1460.

Hanss M. (2002). "The Transformation Method for the simulation and analysis of systems with uncertain parameters", *Fuzzy Sets and Systems*, **130**(3), pp277-289.

Hanss M. (2003). "The extended transformation method for the simulation and analysis of fuzzy-parameterized models", *Int J Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **11**(6), pp711-727.

寒野善博, 竹脇　出 (2005). "剛性および外力の不確定性を考慮したトラスのロバストネス関数に対する近似アルゴリズム"，日本建築学会構造系論文集，第 591 号, pp53-60.

Koyluoglu HU, Elishakoff I. (1998). "A comparison of stochastic and interval finite elements applied to shear frames with uncertain stiffness properties", *Comp Struct*, **67**, pp91-98.

McWilliam S. (2001). "Anti-optimization of uncertain structures using interval analysis", *Comp Struct*, **79**, pp421-430.

Moens D and Vandepitte D. (2004). "An interval finite element approach for the calculation of envelope frequency response functions", *Int J Num Meth Engrg*, **61**(14), pp2480-2507.

Moens D and Hanns M. (2011). "Non-probabilistic finite element analysis for parametric uncertainty treatment in applied mechanics: Recent advances", *Finite Element in Analysis and Design*, **47**(1), pp4-16.

Moore RE. (1966). "Interval analysis", Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Mullen RL, Muhanna RL. (1999). "Bounds of structural response for all possible loading combinations", *J Struct Engrg ASCE*, **125**, pp98-106.

日本建築学会 (2001), "免震構造設計指針".

日本免震構造協会 (2010). "免震構造 部材の基本から設計・施工まで".

Qiu ZP., Chen SH and Song D. (1996). "The displacement bound estimation for structures with an interval description of uncertain parameters", *C Numer Meth Engng*, **12**, pp1-11.

Qiu ZP. and Elshakoff I. (1998). "Antioptimization of structures with large uncertain- but-nonrandom parameters via interval analysis", *Comp Meth Appl Mech Engrg*, **152**, pp361-372.

Qiu ZP. (2003). "Comparison of static response of structures using convex models and interval analysis method", *Int J Numer Meth Engng*, **56**, pp1735-1753.

Rao SS, Sawyer P. (1995). "Fuzzy finite element approach for the analysis of imprecisely defined systems", *AIAA J*, **33**(12), pp2364-2370.

Rao SS., Berke L. (1997). "Analysis of uncertain structural systems using interval analysis", *AIAA Journal*, **34** (4), pp727-735.

Rao SS., Chen L. (1998). "Numerical solution of fuzzy linear equations in engineering analysis", *Int J Numer Meth Engrg*, **43**, pp391-408.

Takewaki I., Ben-Haim Y. (2005). "Info-gap robust design with load and model uncertainties", Special Issue: Uncertainty in Structural Dynamics, *J. Sound & Vibration*, **288**(3), pp551-570.

Takewaki I. (2008). "Robustness of base-isolated high-rise buildings under code-specified ground motions", *Struct. Design Tall Spec. Build.*, **17**, pp257-271.

東野雅彦，和田　章 (2009). "地震入力に対してロバスト性のある免震構造に関する研究"，日本建築学会構造系論文集，第 641 号, pp1233-1240.

趙衍剛，小野徹郎，鈴木　誠 (1997). "パラメータの不確定性を考慮した動的構造信頼性評価"，日本建築学会構造系論文集，第 497 号，pp33-38.

第 7 章　結論

本論文の概要および得られた結論を以下にまとめる。

第 1 章は序論であり，地震動の多次元性に関する不確定性，入力の不確定性を考慮した最適ダンパー配置問題および構造物特性の不確定性を考慮したロバスト性評価法について言及し，本論文の目的および意義について述べている。

第 2 章では，地震動の多次元性に起因して存在する不確定性について分析を行った上で，2 方向の地動成分間の相関関係に関する極限外乱問題の定式化およびその解法を提示している。具体的には，まず種々の記録地震波の水平 2 方向地動加速度の成分間のクロススペクトル密度関数(以下，Cross PSD 関数) およびコヒーレンス関数を分析している。水平 2 方向成分間で互いに位相差を有し波形の相似形が見られない場合でも，コヒーレンス関数を分析することにより周波数領域における相関性の度合いを測ることが可能となる。記録地震波に対する分析結果から，観測点の近傍に震源が位置し，観測点における地盤条件が岩盤である場合には相関性が強い波が多く観測されており，多成分同時入力地震動における成分間の相関性が構造物に及ぼす影響を考慮した設計法の必要性を提示している。

本極限外乱問題においては，入力外乱モデルとして包絡関数 $c(t)$ と平均 0 の定常ガウス確率過程に従う確率変数 $w(t)$ の積で与えられる確率論に基づく非定常入力地震動モデルを採用している。多次元性を考慮した応答量として対象とする評価関数は，2 方向水平同時入力を受ける柱頭縁応力の 2 乗平均応答としている。水平 2 方向同時入力問題において入力の相関関係が応答に及ぼす影響を考慮し，構造物にとって応答が増大する最悪な入力の相関関係を与える Cross PSD 関数を見出すことが本極限外乱問題の特徴である。具体的には，各方向の地動外乱群の周波数特性をそれぞれの加速度成分の Auto PSD 関数により規定したもとで，2 乗平均応答における入力成分間の相関に関連する項が，入力加速度成分の Cross PSD 関数の実部(=Co-spectrum)および虚部(Quad-spectrum)を独立変数として表される定式化を行っている。水平 2 方向同時入力問題を扱う上で，地動主軸の存在を仮定している Penzien-Watabe モデルを拡張した拡張 Penzien-Watabe モデルを提案し，これを本極限外乱問題に適用している。本入力モデルでは，地動主軸方向における地震動の PSD 関数 $S_{z1}(\omega)$ と $S_{z2}(\omega)$ を規定し，地動主軸と建物軸のなす角 θ を一つの変数と見なす。$S_{z1}(\omega)$ に対する $S_{z2}(\omega)$ の比を γ_{org} とすれば，建物軸に入力される地動成分は，γ_{org} と θ の関数で表わされ，これらの地動成分間のコヒーレンス関数も γ_{org} と θ の陽な関数で表される。コヒーレンス関数は，Cross PSD 関数と Auto PSD 関数の比率で定義されており，本入力モデルを扱う場合では，対象とする応答量の相関に関する項を評価する際にコヒーレンス関数を Cross PSD 関数の制約条件に付加している。

第 2 章で提案する極限外乱問題においては，2 方向地動成分間の Cross PSD 関数は，2 乗平均応答を与える時刻 t および振動数 ω の関数となっている。対象とする応答量を最大化する最悪な Cross PSD 関数を決定するために，時間と振動数の関数である応答の相関に関する項を，時間ステップごとに振動数に関して最大化を行っている。振動数領域での最大化における被積分項は，未知変数である Cross PSD 関数の実部および虚部が構造物特性を表す確定値と互いに内積の関係にあることを明らかにし，これを最大化する明快な方法を提示している。これにより時々刻々変化する多成分入力地震動成分間の最悪な相関関係を厳密に見出すことが可能となっている。

第 3 章では，地震動外乱群の振動数特性を特徴づける地動加速度の Auto PSD 関数を規定せず，

任意の振動数特性を有する Auto PSD 関数を有する外乱群（モデルフリー地震動と呼称）を対象とし, 水平上下同時入力を受ける平面骨組における梁端部曲げモーメント応答に関する極限外乱問題を提示している。ここでは，非定常模擬入力地震動のパラメターである確率変数 $w(t)$ を決定づける Auto PSD 関数が任意の振動数帯域で有限のパワーを有する矩形 PSD 関数で与えられると仮定している。本問題では，入力外乱の Auto PSD 関数が変動するため，対象とする応答量を最大化するためには, 応答の相関に関する項のみならず各方向の自己相関に関する項も考慮する必要がある。建物モデルの水平および鉛直方向の振動特性とモデルフリー地震動における振動数帯域の関係が極限応答に及ぼす影響について考察を行い，水平上下同時入力に対する梁端部曲げモーメント和の 2 乗平均応答における相関項を最大化する最悪な振動数帯域の組み合せ，すなわち最悪な Auto PSD 関数の組み合せを見出す方法を提案している。各方向の Auto PSD 関数が矩形で与えられる場合に限れば，各方向の Auto PSD 関数の相乗平均の振動数域での積分値（パワー）を最大化するような最悪な振動数帯域は，水平もしくは鉛直方向の矩形 PSD 関数の振動数帯域が建物モデルの各方向の 1 次固有円振動数の差の 2 倍に等しく，かつ他方の方向の矩形 PSD 関数の振動数帯域が限りなく小さい時に極大となることを明らかにしている。

また, 水平および鉛直方向の固有円振動数の組み合せの違いが各方向の入力成分の相関による応答増加に及ぼす影響について，各方向の Auto PSD 関数の振動数帯域をパラメターとした数値解析を行っている。建物モデルの水平および鉛直方向の固有円振動数が近接するモデルでは，各方向の入力成分の相関による応答増加の影響が顕著となる最悪な Auto PSD 関数の組み合せが存在することを明らかにしている。一方，建物モデルの水平および鉛直方向の固有円振動数が相対的に離れている場合には，共振作用による応答増加の影響の方がより顕著であるため，入力の相関による応答増加の影響はほとんど見られないことを確認している。従って，建物モデルの水平および上下方向の固有円振動数が近接する場合では, 水平上下同時入力地震動の相関性が応答に及ぼす影響に留意する必要がある。

さらに最悪な相関性を見出す極限外乱問題により得られた Cross PSD 関数が多次元入力外乱の位相差特性を与えることに着目し，確定的な 1 入力成分に対して最悪な位相差特性を有する他方向入力を時間領域で見出す方法を提示している。数値例では，特定の卓越振動数を有する正弦波から構成される模擬波と現実的な地震動入力に対して, 本極限外乱理論により導かれる最悪な位相差特性を与える Cross PSD 関数をそれぞれ求めている。本手法により生成された多次元入力地震動は，対象とする構造物の各方向の最大応答をほぼ同時刻に励起させる極限的な入力となっていることを確認しており，本極限外乱法の有用性，実用性を示しているといえる。

第 4 章では，既往の極限外乱理論に基づき設定された入力に対して，取り付け部材の影響を考慮した粘弾性ダンパーを有する構造物の層間変位の 2 乗平均値の和を目的関数として最適設計問題を定式化し，その解法アルゴリズムを構築している。第 4 章で扱うパッシブダンパーとしては，支持部材剛性を考慮した 4 要素モデルで表わされるアクリル系粘弾性ダンパーを対象としている。パッシブダンパーを付加することにより得られる応答低減効果は，支持部材剛性の影響を大きく受ける。ここでは，支持部材に作用する軸力を評価対象として加えて，ダンパー配置のみならず支持部材剛性を設計変数とする新しい最適設計問題を展開している。すなわち，支持部材に作用する軸力に関する制約条件を考慮し, 支持部材に作用する軸力が規定値に達すると支持部材剛性の設計変更を行うもの

としている。支持部材剛性の設計変更はシステムの構造特性に少なからず影響を及ぼすため，最適なダンパー配置解にも影響を与える結果となっている。

本最適設計問題においては，構造物に対して最悪な応答を与える入力外乱の特性が，粘弾性ダンパー(VED)の配置ならびに支持部材剛性の変動に伴うシステムの構造特性の変化に応じて変動する変動極限外乱を定義している。すなわち，支持部材剛性を考慮した VED の付加に伴う構造物の 1 次固有振動数と共振するようなパワースペクトル密度関数(有帯域ホワイトノイズ)を変動極限外乱のパワースペクトル密度関数として定めている。変動極限外乱，すなわち，共振的な入力に対して評価関数を最小化するような最適なダンパー配置および支持部材剛性を見出すことにより，様々な入力に対しても応答に関する制約を満足することが可能であると考えられる。

本最適設計問題における評価関数は，層間変位の 2 乗平均応答の総和であり，振動数領域による定式化により陽に表現することが可能である。そこで，評価関数の設計変数に対する勾配ベクトル(1 次感度)ならびに Hessian マトリックス(2 次感度)をそれぞれ陽に導出し，ラグランジュ未定乗数法に基づく勾配型最適化アルゴリズムを提示している。本最適化手法では，初期の状態においてはダンパー未付加状態であり，漸増するダンパー総量に応じて最適設計解を順次導出していくため，設計者が意図する任意の性能を満足する最適設計解を得ることができる。

第 5 章では，第 4 章で展開したパッシブダンパーに対する最適設計問題において，入力外乱の特性に依存せず，構造物のパラメターのみで記述可能な伝達関数を用いた最適ダンパー配置法を展開している。本章における最適設計問題における評価関数は，層間変位伝達関数の振動数および層方向に関する最大値とし，その解法アルゴリズムを提示している。

通常の耐震設計においては，最大層間変形角が規定値を下回ることが要求されることが多く，層間変位が最も増大する層位置へパッシブダンパーを配置することが一般的には有効であると考えられる。本最適ダンパー配置問題では，評価関数である層間変位伝達関数振幅の最大値をとる層位置が最適化の過程において切り替わる問題となっている点が，第 4 章で展開している最適設計問題とは異なる点である。すなわち，層間変位伝達関数振幅が最大となる層位置を逐次選定するため，評価関数の設計変数に関する勾配ベクトルが不連続となる特殊な最適化問題となっている。評価関数が切り替わった際には，評価関数の設計変数である各層のダンパー配置量に対する 1 次感度（＝勾配ベクトル）を当該層のものに切り替える必要がある。従って，第 5 章における最適ダンパー配置問題においては，層間変位伝達関数振幅が最大となる層位置における感度解析をあらかじめ行う勾配型の最適化アルゴリズムを提示している。

本最適化手法を用いた数値解析例では，種々の最適化問題の解法アルゴリズムにより得られる最適解との比較を行っている。比較対象として用いた最適化問題の解法アルゴリズムは，逐次 2 次計画法および H^∞ノルム最適化手法（山本ら，2010）である。前者については，同じ問題を扱ったとしても初期値依存性があり，本提案手法により得られる最適ダンパー配置解とは異なる配置解が得られる場合があることを明らかにしている。それぞれの手法において実際に得られた最適ダンパー配置解に対する層間変位伝達関数振幅を比較すれば，本提案手法により得られた最適ダンパー配置解は逐次 2 次計画法により得られた配置解に比べてより効率よく最大振幅値を抑制していることを明らかにしている。また，H^∞ノルム最適化問題は，評価関数が伝達関数マトリクスの特異値の上限値である H^∞ノルムであるという点で層間変位伝達関数の最大振幅値とは異なる問題設定であるが，両者の手法により得られる最適配置解に有意な差はなく，ほぼ同等の結果が得られている。H^∞制御理論はロバスト安定性に優れた制御理論として確立されており，本提案手法に見られるよ

うな伝達関数を用いた最適化手法がパッシブダンパーの最適配置問題においても有効であることを示している。

第 6 章では，入力のみならず構造物特性の不確定性を考慮することを目的とし，不確定性解析手法の一つである区間解析法では扱うことが困難であった目的関数の非単調性を有する問題に対しても有効な新しい区間解析法(Updated Reference Point 法)を構築しており, 免震建物の免震性能に関する不確定性解析の数値例を通して URP 法の優位性を示している。

これまでの第 2 章，第 3 章で扱った極限外乱問題は，入力外乱そのものが不確定性の高い事象であるという立場に立脚していた。しかしながら，入力外乱を受ける建築構造物の特性を決定づける物理パラメター(剛性や減衰係数，耐力等)にも少なからず不確定性が存在するため，入力の不確定性のみならず構造物パラメターの不確定性が構造物応答に及ぼす影響についても十分配慮する必要がある。従来の区間解析法は，目的関数の単調性を仮定し，不確定パラメターの端点の組み合せ（＝不確定パラメターの変動領域の境界）において目的関数の上下限値が生じるものとしている。一方，6 章で提案する不確定性解析法では, 不確定パラメターの変動に対する目的関数の変動を 2 次曲線で近似する方法を用いており, 不確定パラメターの変動領域内において目的関数が最大化される問題についても有効である。

第 6 章で提案する不確定性解析法では，2 次曲線の形式で近似された目的関数の変動項の極値(最大値もしくは最小値)を与える不確定パラメターを陽に導くことが可能であることを利用することで, 目的関数の上限値を与える不確定パラメターの組み合せを探索する上で有効であることを示している。また，基準点を逐次更新する URP 法の概念を提示し，その解析アルゴリズムを構築している。URP 法では，ノミナルモデルにおける勾配ベクトルから判定される目的関数の変動に影響の大きい不確定パラメターから順に最悪値に更新していくことで, 不確定パラメターの変動領域内における目的関数の変動を高い自由度で追跡することを可能である。

数値例では，基礎免震を構成するアイソレータの種別が異なる 3 つの免震建物モデル(: (A)天然ゴム系積層アイソレータ(NRB)とオイルダンパー，(B) 鉛プラグ入り積層ゴムアイソレータ(LRB)，(C) NRB, LRB およびオイルダンパー)についてそれぞれ不確定性解析を実施した。免震建物モデル(A)では, では弾性時刻歴応答解析により地震時応答を評価するため構造物パラメターの変動に対する目的関数の変動が連続的になるため, 各不確定パラメターによる目的関数の変動を 2 次微係数の非対角成分項を無視した Taylor 展開の 2 次近似で定式化することが可能である。一方，免震建物モデル(B)および(C)では弾塑性時刻歴応答解析により地震時応答を評価しており，数値感度解析の精度に問題が生じるため，いくつかのサンプル点での応答解析結果から各不確定パラメターによる目的関数を 2 次の多項式近似で表す方法を採用しており，URP 法の適用性を確認している。特に頂部絶対加速度応答に関しては，上部構造物の構造物パラメターのばらつきの影響が顕著に現れるため，免震層のみの特性変動を考慮した従来の免震建物設計法では応答上限値を過小評価されることが問題となる。本提案手法を適用することにより, ばらつきを考慮する不確定パラメターが多数存在する場合においても応答上限値を高効率，高精度に評価することが可能である。

謝辞

本論文は，筆者が京都大学工学部建築学科卒業論文および同大学院工学研究科都市環境工学専攻修士論文として取り上げた研究課題をさらに発展させたもので，同大学院都市環境工学専攻博士後期課程在籍時の学位論文として，建築構造の分野における種々の不確定性に関連する課題に対する研究成果を取りまとめたものである。

筆者が竹脇・辻研究室に配属したのは学部 4 年生からであり，以後同研究室において 6 年間研究に従事してきました。筆者は，研究室への配属する以前から学術的研究に興味があり，竹脇 出先生（現京都大学教授）には研究の在り方や姿勢に至るまで様々な助言を頂き，常日頃から変わらぬ懇切丁寧かつ的確なご指導を賜りました。さらに，竹脇先生の研究に対する熱い情熱に強く感銘し，国際ジャーナルへの論文投稿をはじめとして世界的視野のもとで研究に従事することができました。本論文をまとめることができましたのも，ひとえに竹脇先生のおかげであり，心より深く感謝申し上げます。

Abbas Moustafa 先生(現ミニア大学(エジプト))には，外国人研究員として竹脇・辻研究室に在籍時に常に熱意あるご指導と貴重なご助言を賜りました。ここに深い感謝の意を表します。

上谷 宏二先生(現京都大学教授)には，学術発表の場において研究の方向性について貴重なご助言を賜りました。ここに深い感謝の意を表します。

林 康裕先生(現京都大学教授)には，本論文の審査にあたり貴重なご指導，ご助言を賜りました。ここに深い感謝の意を表します。

辻 聖晃先生(現京都大学准教授)，吉富 信太先生(現京都大学助教)には，研究室ゼミにおいて，貴重なご指導を賜りました。ここに深く感謝申し上げます。

筆者の在籍する竹脇・辻研究室の先輩，同級生，後輩の皆様方とは，研究生活をともに過ごし，様々な研究課題に関する数多くの知見を得ることができました。ここに深く感謝申し上げます。

2012 年 1 月　藤田 皓平